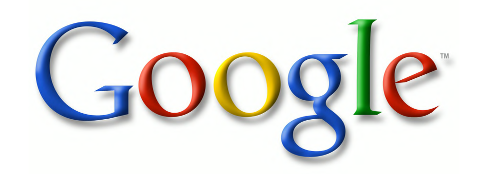
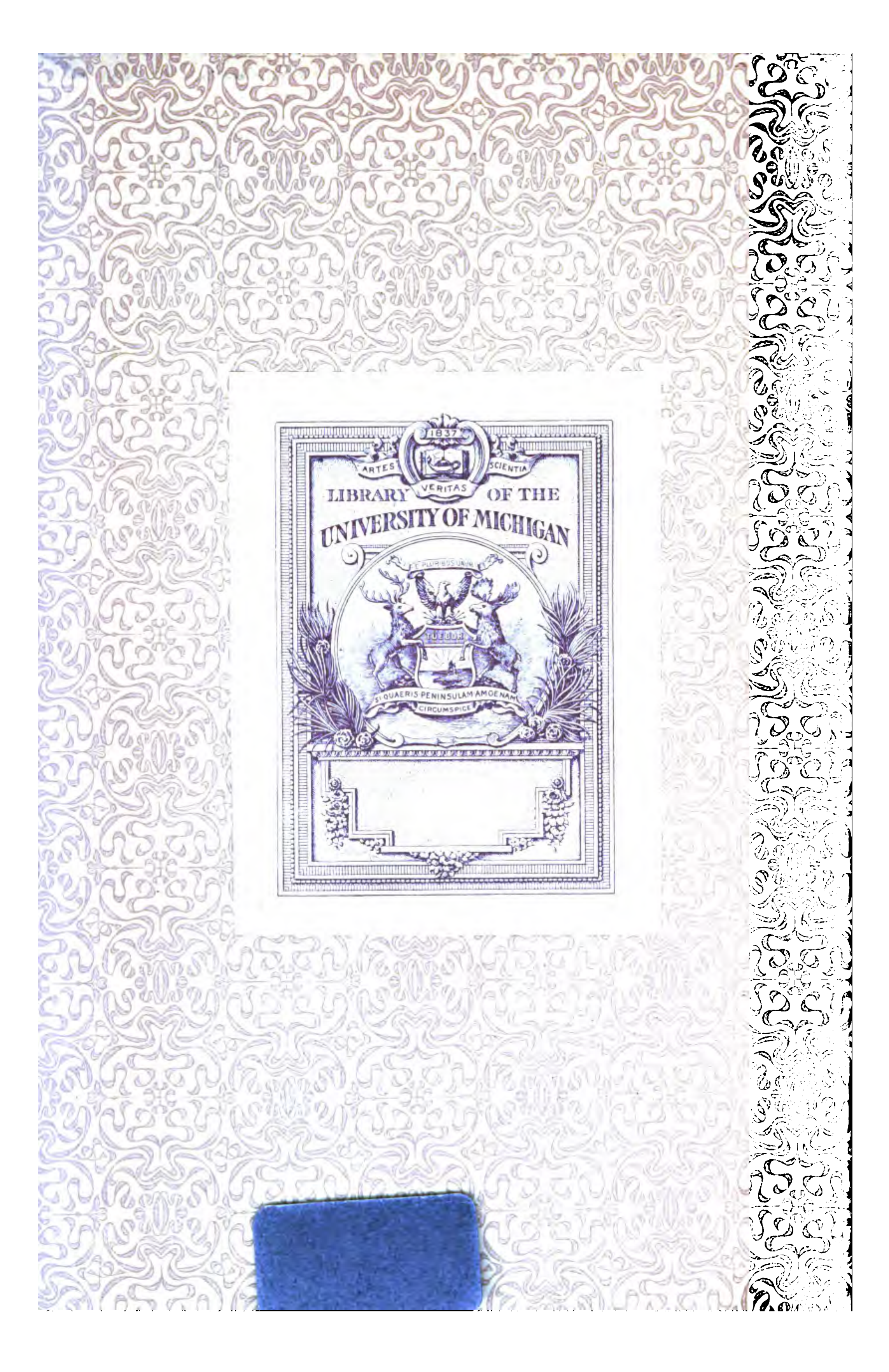
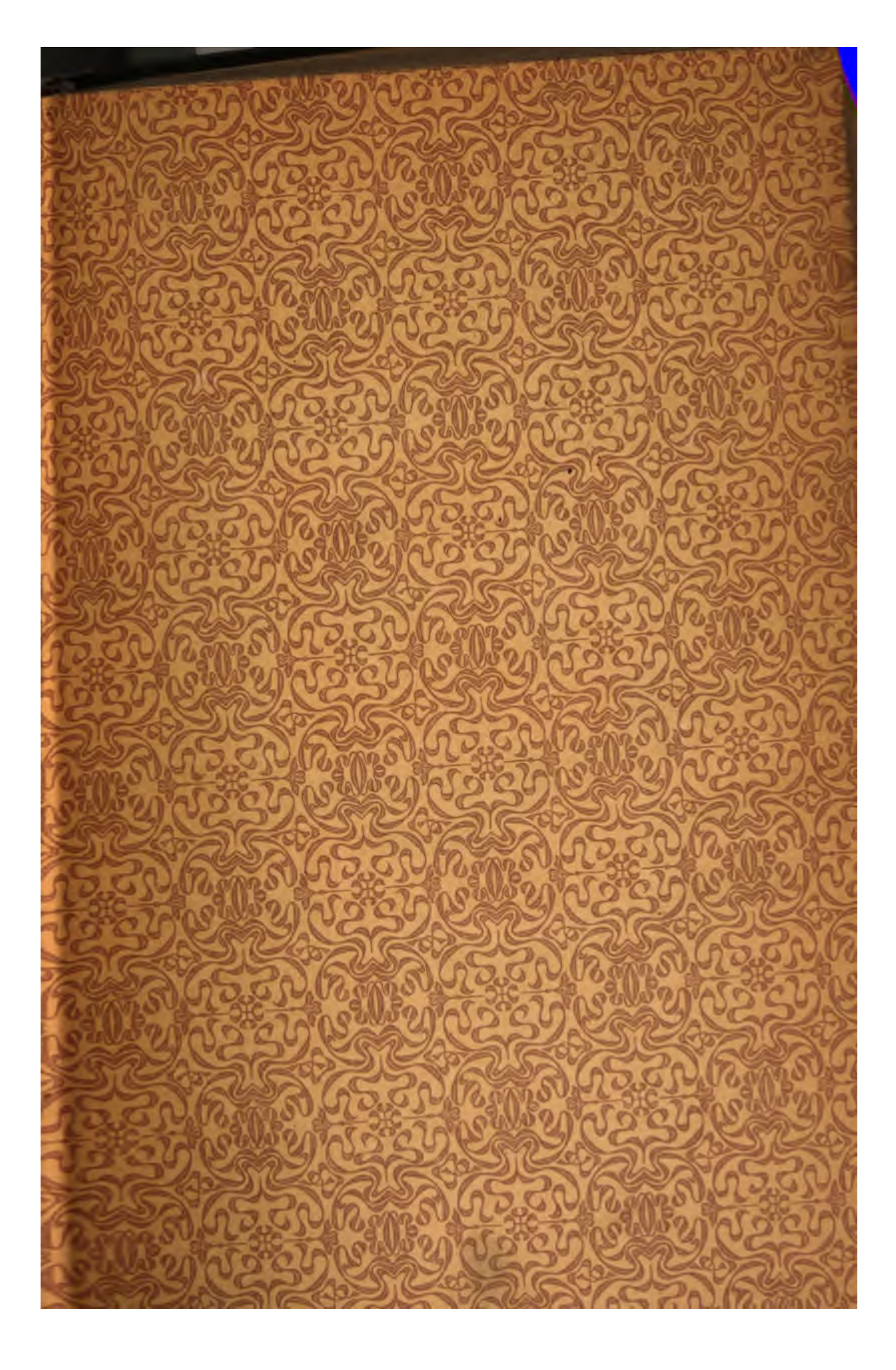




1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



LEHRBUCH

DER

KRYSTALLBERECHNUNG.

MIT ZAHLREICHEN BEISPIELEN,
DIE MIT HILFE DER SPHÄRISCHEN TRIGONOMETRIE
AUF GRUND EINER STEREOGRAPHISCHEN PROJECTION
BERECHNET WURDEN.

VON

FERDINAND HENRICH,
OBERLEHRER AM REALGYMNASIUM IN WIESBADEN.

MIT 95 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

STUTTGART.
VERLAG VON FERDINAND ENKE.
1886.

Druck von Gebrüder Kröner in Stuttgart.

Vorrede.

In dem vorliegenden Lehrbuch der Krystallberechnung wird die Kenntniss der sphärischen Trigonometrie und der Krystallgestalten vorausgesetzt.

Die Berechnung der Krystalle auf Grundlage einer stereographischen Projection wird sich nach meiner Ueberzeugung mehr und mehr Bahn brechen. Obwohl nun die Theorie in vielen Werken ausführlich behandelt wird, so existirt doch kein einziges, in dem sie durch zahlreiche Beispiele erläutert ist. Diese Lücke auszufüllen, ist das vorliegende Lehrbuch bestimmt. Es behandelt daher auch die stereographische Projectionsmethode so weit als nothwendig ist, um den Leser in den Stand zu setzen, jede Gestalt und Combination richtig zu projiciren. Obgleich die Tendenz des Werkes eine vorwiegend praktische ist, so ist doch auch der Theorie in so ausreichendem Masse Rechnung getragen, dass die meisten Combinationen nach mehreren Methoden konnten berechnet werden. Und das ist gewiss nicht von geringem Werth; denn der Gesichtskreis des Lesers wird dadurch erweitert und er selbst zur Auffindung anderer Wege angeregt; ausserdem wird ihm aber eine wichtige Controle für die Richtigkeit seiner Rechnungen geboten.

Die Theorie der Zwillingsbildung ist hier für recht- und schiefwinklige Axen ganz ausführlich behandelt und auf die

verschiedenen Zwillingsgesetze zur Anwendung gebracht worden. Insbesondere ist auch die Bestimmung der Zwillingsfläche auf verschiedenen Wegen an vielen Beispielen erläutert.

Die bei der Berechnung einfacher Gestalten aufgestellten allgemeinen Formeln finden sich zwar grösstentheils in Naumanns Lehrbuch der reinen und angewandten Krystallographie auf analytischem Wege entwickelt, auf Grundlage einer stereographischen Projection sind sie aber hier zum ersten Male abgeleitet.

Als Indices wurden stets die reciproken Werthe der Ableitungszahlen m und n genommen; einmal, weil sich die Gleichungen einer Krystallfläche dadurch oft einfacher gestalten, hauptsächlich aber weil das Naumann'sche Zeichen sich alsdann sofort ergiebt.

Die hexagonalen Gestalten und Combinationen wurden unter Zugrundelegung des von Schrauf zuerst angegebenen rechtwinkligen Axensystems ($1 : \sqrt{3} : c$) berechnet. Da auch hier als Indices die reciproken Werthe der Ableitungszahl m und n genommen wurden, so mussten einige neue Beziehungen aufgestellt werden. Neu ist auch die Discussion der im hexagonalen und den folgenden Systemen aufgestellten Gleichungen für die Indices e f g der homologen Fläche eines Zwillingskrystalls.

Daraus kann man schon erkennen, dass nicht eine blosse Zusammenstellung längst bekannter Beziehungen, dass auch manches Neue geboten wird.

Die stereographischen Projectionen sind bis auf eine einzige [illegible] ganz neu construirt worden. Die parallelperspectivischen Zeichnungen der Combinationen dagegen sind nach den vorhandenen Originalen gezeichnet, und es ist jedesmal an dem betreffenden Orte die Quelle angegeben. Diese Zeichnungen und die Winkel je zweier Flächen sind die einzigen Daten, die

bei der Berechnung der Combinationen anderen Werken entnommen werden konnten.

Unter Kantenwinkel ist überall der von zwei in einer Kante zusammenstossenden Flächen eingeschlossene innere Winkel verstanden.

Bei der Berechnung der einzelnen Beispiele wurden gewöhnlich fünfstellige Logarithmen angewendet, weil diese bei der bis jetzt erreichten Zuverlässigkeit der Winkelangaben vollständig ausreichen.

Zu besonderem Danke bin ich dem Herrn Dr. Eduard Hoffmann in Wiesbaden verpflichtet für die Bereitwilligkeit und Sorgfalt, mit der er mich beim Correcturlesen unterstützte.

Henrich.



Inhaltsverzeichniss.

Berechnung complicirter Combinationen.

Tetragonales Krystallsystem.

Berechnung complicirter Combinationen.

Hexagonales Krystallsystem.

Entwickelung zusammengesetzter Combinationen.

Rhombisches Krystallsystem.

Berechnung complicirter Combinationen.

Monosymmetrisches Krystallsystem.

Fortlaufende Quellen.

Neues Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Petrefactenkunde. Stuttgart. Seit 1833.

Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie, herausgegeben von P. Groth. Leipzig. Seit 1877.

Annalen der Physik und Chemie (jetzt herausgegeben von Wiedemann). Leipzig. Seit 1824.

Mineralogische Mittheilungen. Gesammelt von G. Tschermak. Wien. Seit 1872.

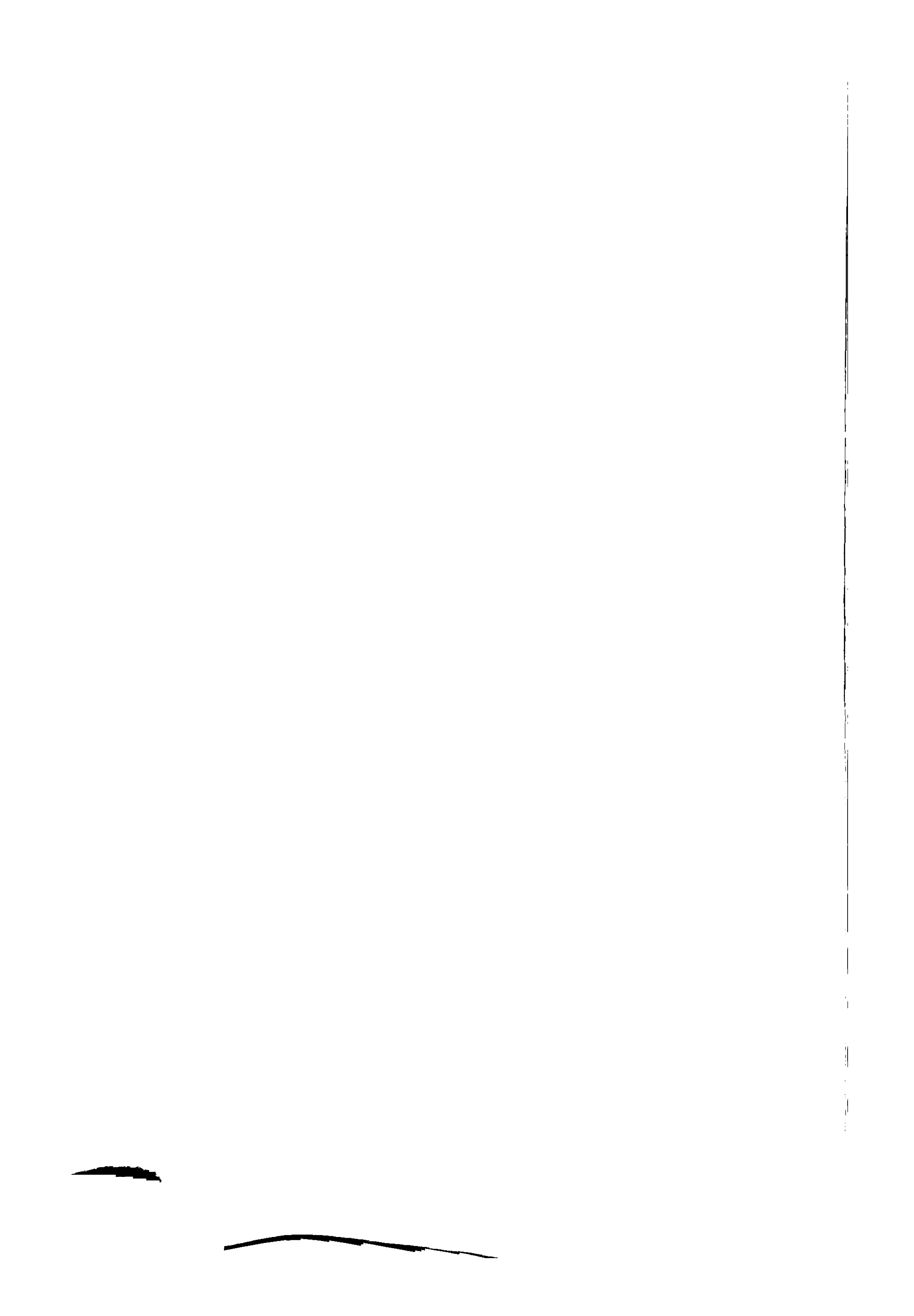
N. v. Kokscharow, Materialien zur Mineralogie Russlands.

Kenngott, Uebersicht der Resultate mineralogischer Forschungen. Seit 1844.

Hessenberg, Mineralogische Notizen. Heft 1—11 (geschlossen).

Druckfehler.

Auf Seite 186, Zeile 4 muss es heissen: Die Gleichung der Fläche e, deren Indices $h\bar{k}l$ (statt $\bar{h}kl$) sind.



Einleitung in die Berechnung der Krystalle.

Aufstellung der Grundgleichungen.

§. 1.

Es seien OX, OY, OZ (s. Fig. 1) drei begrenzte, in einem Punkte O unter beliebigen Winkeln sich schneidende Linien. Verlängern wir jede vom Punkte O aus um sich selbst, so haben wir ein schiefwinkliges Axensystem. Die Linien selbst nennen wir Axen. Die gezeichneten Richtungen OX, OY, OZ sollen die positiven Richtungen der Axen, die vom Punkte O aus nach entgegengesetzter Richtung verlängerten Linien die negativen Richtungen der 3 Axen sein.

Fig. 1.

Irgend eine Ebene HKL ist festgelegt durch die 3 Abschnitte OH, OK, OL auf den Axen. Diese Abschnitte nennt man die Parāmēter (Coordinaten) der Ebene oder der Fläche, denn in der Krystallographie werden die Ebenen Flächen genannt. Da in der Krystallographie parallele Flächen als identische betrachtet werden, so ist die Ebene HKL in krystallographischer Hinsicht schon bestimmt durch

... Verhältniss der Parameter (OH : OK : OL). Durch das Axensystem zerfällt der Raum in 8 Abtheilungen, die man Octanten nennt, mithin gibt es auch 8 Flächen, die das Parameterverhältniss OH : OK : OL haben. Sollen sie von einander unterschieden werden, so muss jedes Parameter mit dem Vorzeichen + oder — versehen werden. Das +Zeichen kann man auch weglassen, das —Zeichen nicht. Die Fläche, deren Parameterverhältniss OH : OK : OL ist, liegt mithin (s. Fig. 1) in dem vorderen, oberen, rechten Octanten; die Fläche, deren Parameterverhältniss OH : OK : — OL ist, in dem vorderen, unteren, rechten Octanten.

Da vom Mittelpunkte O des Axensystems nur eine einzige Normale auf die Fläche HKL möglich ist, so ist die Fläche auch bestimmt durch die Länge und Richtung dieser Normale, und da in der Krystallographie parallele Flächen als identische angesehen werden, durch die Richtung der Normale allein. Diese Normale nennt man *Träger* der Fläche.

Denken wir uns um den Mittelpunkt des Axensystems eine Kugel mit beliebigem Radius construirt und verlängern die Normale der Fläche HKL, bis sie die Oberfläche der Kugel durchsticht, so ist die Fläche HKL durch diesen Punkt auf der Kugel, welcher *Pol* der Fläche HKL genannt wird, auch bestimmt; denn verbinden wir ihn mit dem Axenmittelpunkte, so erhalten wir den Träger der Fläche HKL.

Es gibt noch eine andere Methode, eine Fläche zu bestimmen, die darin besteht, die Fläche auf irgend eine Ebene, die man Grundebene nennt, zu beziehen. In Fig. 1 sei ABC die Grundebene, deren Parameter a, b, c sind. Nun gibt es offenbar eine Zahl, die mit a multiplicirt gleich OH wird. Nennen wir diese Zahl $\frac{1}{h}$, so ist:

$$1)\quad \left\{ \begin{array}{l} OH = a \cdot \frac{1}{h}. \quad \text{Ebenso sei} \\ OK = b \cdot \frac{1}{k}, \\ OL = c \cdot \frac{1}{l}. \end{array} \right.$$

Die Zahlen h, k, l nennt man die Indices der Fläche HKL; die Parameter a, b, c der Grundebene nennt man nun Axenlängen, das Zeichen (hkl) das Symbol der Ebene HKL. Aus der Gl. 1 ersehen wir, dass der Index gleich ist dem Quotienten aus der Axenlänge und dem Parameter

$$\left(h = \frac{a}{OH} \quad k = \frac{b}{OK} \quad l = \frac{c}{OL}\right).$$

Nennt man die Zahl, die mit a multiplicirt OH liefert, m, so ist auch

$OH = a . m$; ebenso sei $OK = b . n$ und $OL = c . r$.

Die Zahlen m, n und r nennt man Ableitungszahlen. Vergleicht man die letzten 3 Gleichungen mit den Gleichungen 1, so bemerkt man sogleich, dass die Indices die reciproken Werthe der Ableitungszahlen und die Ableitungszahlen die reciproken Werthe der Indices sind. Kennt man mithin die Ableitungszahlen, so kennt man auch die Indices und umgekehrt.

Der Erfahrung gemäss kommen an einem Krystalle nur solche Flächen vor, deren Indices (oder Ableitungszahlen) sich wie einfache rationale Zahlen verhalten, vorausgesetzt, dass man den Krystall auf ein Axensystem bezieht, dessen Richtungen und Längen durch den Schnitt irgend welcher möglichen Flächen des Krystalls bestimmt werden. Dies ist das Gesetz der Rationalität der Indices. Der Erfahrung gemäss ist auch ein Krystall in krystallographischer und physikalischer Beziehung entweder holosymmetrisch oder hemisymmetrisch nach allen Flächen eines seiner charakteristischen Flächencomplexe.

§. 2.

Erste Aufgabe. Man soll die Gleichung einer Fläche angeben, welche die Beziehung zwischen den Indices, den Axenlängen und denjenigen Winkeln ausdrückt, welche die Normale OP der Ebene HKL (s. Fig. 2) mit den Axen OX, OY und OZ bildet. Die Axen OX, OY und OZ sollen unter beliebigen Winkeln gegen einander geneigt sein.

Es sei OP die Normale (Träger) der Ebene HKL vom Punkte O aus. Verbinden wir den Durchstechungspunkt P der

Normale und der Ebene mit H. K. L durch gerade Linien, so erhalten wir die rechtwinkligen Dreiecke OPL, OPH und OPK.

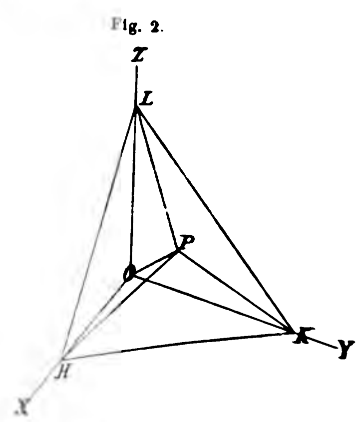


Fig. 2.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck POH folgt

$$\cos POH = \cos POX = \frac{OP}{OH}.$$

Ebenso folgt

$$\cos POK = \cos POY = \frac{OP}{OK}$$

und

$$\cos POL = \cos POZ = \frac{OP}{OL}.$$

Schreiben wir statt POX, POY, POZ kürzer PX, PY, PZ, so folgt aus den letzten 3 Gleichungen

$$OP = OH \cos PX = OK \cos PY = OL \cos PZ.$$

Setzen wir hier für OH, OK und OL die Werthe aus den Gleichungen 1 des §. 1, so erhalten wir die gesuchte Gleichung der Fläche HKL in der folgenden Form:

$$2) \quad \frac{a}{h} \cos PX = \frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ.$$

In dieser Gleichung sind a, b und c die Parameter der Grundebene, die sogenannten Axenlängen; h, k, l die Indices der Fläche HKL, und PX, PY und PZ die Winkel der Normale mit den Axen X, Y und Z. Die Indices können positiv und negativ sein. Ist z. B. h negativ, k und l positiv, so liegt die Fläche in dem hinteren, oberen, rechten Octanten.

Wenn die Ebene HKL der Axe OX durch Drehung parallel wird, so ist h = 0 und PX = 90, mithin cos PX = 0. Dann wird das erste Glied der Gl. 2 gleich $\frac{a \cdot 0}{0} = \frac{0}{0}$.

Die zwei anderen Glieder bleiben ungeändert. Der Ausdruck $\frac{0}{0}$ ist demnach gleich $\frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ = OP$ und die Gleichung der Fläche ist alsdann:

$$\frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ.$$

Dreht man die Ebene HKL so, dass sie der Axe X und Y zugleich parallel wird, so ist $h = k = 0$ und $\cos PX = \cos PY = 0$, mithin geht die Gl. 2 über in

$$\frac{0}{0} = \frac{0}{0} = \frac{c}{l} \cos PZ = OP.$$

Die Ausdrücke $\frac{0}{0}$ haben hier wieder denselben Werth wie vorher und die Gleichung der Fläche ist in diesem Falle

$$\frac{c}{l} \cos PZ = OP.$$

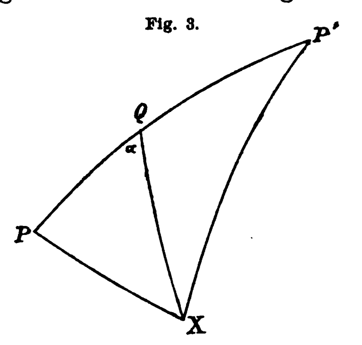
§. 3.

Erklärung. Drei oder mehr Flächen, die einer geraden Linie parallel sind, nennt man tautozonale Flächen. Man sagt auch von solchen Flächen, sie liegen in einer Zone. Die Linie, welcher die Flächen parallel sind, heisst Zonenaxe. Wie sich auch immer die Temperatur des Krystalls ändern mag, so bleiben doch stets, der Erfahrung gemäss, die tautozonalen Flächen tautozonal. Dieses Gesetz nennt man das Gesetz der Erhaltung der Zonen.

Denkt man sich vom Mittelpunkte einer Kugel Senkrechte auf 3 tautozonale Flächen errichtet und verlängert die Senkrechten, bis sie die Oberfläche der Kugel durchstechen, so liegen die Durchstechungspunkte, die sogenannten Pole der tautozonalen Flächen, auf einem grössten Kreise der Kugel.

Zweite Aufgabe. Drei Flächen seien tautozonal. Es soll die Beziehung gefunden werden, welche zwischen den Indices derselben besteht.

Fig. 3.



Wir denken uns um den Axenmittelpunkt mit beliebigem Radius eine Kugel beschrieben, ziehen von diesem Punkte aus die Normalen zu den tautozonalen Flächen und verlängern sie, bis sie die Oberfläche der Kugel in den Punkten P, Q, P′ (s. Fig. 3) durchstechen. Diese 3 Punkte liegen auf einem grössten Kreise der Kugel. Verlängern wir die

X-Axe, bis sie die Oberfläche der Kugel im Punkte X (Fig. 3) durchsticht, und verbinden die Punkte P, Q und P′ mit X durch Bögen grösster Kreise, so erhalten wir aus den 2 sphärischen Dreiecken PXQ und P′XQ die folgenden 2 Gleichungen:

$$\cos PX = \cos PQ \cos QX + \sin PQ \sin QX \cos \alpha,$$
$$\cos P'X = \cos P'Q \cos QX - \sin P'Q \sin QX \cos \alpha.$$

Eliminirt man aus beiden Gleichungen $\cos \alpha$, indem man die erste Gleichung mit $\sin P'Q$, die zweite mit $\sin PQ$ multiplicirt und beide Gleichungen addirt, so erhält man

$$\sin P'Q \cos PX + \sin PQ \cos P'X =$$
$$\cos QX [\sin P'Q \cos PQ + \cos P'Q \sin PQ],$$
$$\text{a)}\ \sin P'Q \cos PX + \sin PQ \cos P'X =$$
$$\cos QX \sin (P'Q + PQ) = \cos QX \sin PP'.$$

Denkt man sich die Y-Axe verlängert, bis sie die Oberfläche der Kugel im Punkte Y durchsticht, verbindet dann Y mit P, Q und P′ durch Bögen grösster Kreise, so kann man in analoger Weise eine zweite Gleichung ableiten. Diese zweite Gleichung erhält man noch einfacher aus der Gl. a, indem man X mit Y vertauscht. Die Gleichung ist

$$\text{b)}\ \sin P'Q \cos PY + \sin PQ \cos P'Y = \cos QY \sin PP';$$

ebenso ergibt sich

$$\text{c)}\ \sin P'Q \cos PZ + \sin PQ \cos P'Z = \cos QZ \sin PP'.$$

Bildet man aus den 3 Gleichungen a, b und c eine einzige, indem man jede der 3 Gleichungen durch $\sin PP'$ dividirt, aus den Gl. a und b die Quotienten $\frac{\sin P'Q}{\sin PP'}$ und $\frac{\sin PQ}{\sin PP'}$ ermittelt und ihre Werthe in die Gl. c einsetzt, so erhält man eine Gleichung, welche die Bedingung der Tautozonalität der 3 Flächen enthält.

Nach leichten Reductionen erhält man die Gleichung

$$\cos PZ [\cos P'X \cos QY - \cos QX \cos P'Y] +$$
$$\cos P'Z [\cos QX \cos PY - \cos QY \cos PX] +$$
$$\cos QZ [\cos P'Y \cos PX - \cos PY \cos P'X] = 0.$$

Daraus folgt

$$\text{d)}\ \cos QX [\cos PY \cos P'Z - \cos P'Y \cos P$$
$$\cos QY [\cos P'X \cos PZ - \cos PX \cos P'Z$$
$$\cos QZ [\cos P'Y \cos PX - \cos PY \cos P'X]$$

Diese Gleichung drückt die Tautozonalität der 3 Flächen durch 9 Winkel aus. Aus ihr bilden wir noch 2 Gleichungen, von denen die eine die Tautozonalität der 3 Flächen durch 3 Winkel und 6 Indices, die andere durch 9 Indices (die Indices der 3 Flächen P, Q, P′) ausdrückt.

Sind wie früher

a, b, c die Axenlängen,
h, k, l die Indices von P,
e, f, g die Indices von Q,
h′, k′, l′ die Indices von P′,

so sind die Gleichungen der Flächen P, Q, P′:

$$\frac{a}{h} \cos PX = \frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ,$$

$$\frac{a}{e} \cos QX = \frac{b}{f} \cos QY = \frac{c}{g} \cos QZ \text{ und}$$

$$\frac{a}{h'} \cos P'X = \frac{b}{k'} \cos P'Y = \frac{c}{l'} \cos P'Z.$$

Bildet man aus der ersten und dritten dieser 3 Gleichungen die in Gl. d vorkommenden Producte und setzt die erhaltenen Werthe in die Gl. d, so ergibt sich die Gleichung

$$\cos QX\,(kl' - k'l)\,.\,a + \cos QY\,(lh' - l'h)\,b + \cos QZ\,(k'h - kh')\,c = 0.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$kl' - k'l = u,$$
$$lh' - l'h = v,$$
$$k'h - kh' = w,$$

[illegible] geht die letzte Gleichung über in

3) [illegible] X + vb cos QY + wc cos QZ = 0.

[illegible]ie G[illegible] v, w bildet man nach folgendem Schema

[illegible] l × h × k
[illegible] l′ h′ k′

[illegible] l, lh′ [illegible] hk′ — h′k
[illegible] w.

[illegible] 3 [illegible] Ta[illegible]it der 3 Flächen P, Q, P′
[illegible]dice[illegible]hen[illegible] P′ und die Winkel QX,

QY und QZ der dritten Fläche aus. Aus ihr erhalten wir die Gleichung, welche die Tautozonalität der 3 Flächen durch die Indices der 3 Flächen ausdrückt, indem wir aus der Gleichung

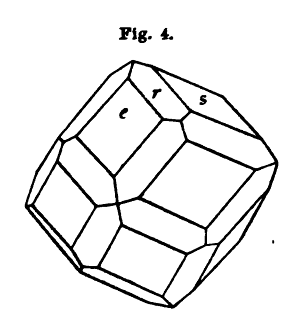
$$\frac{a}{e} \cos QX = \frac{b}{f} \cos QY = \frac{c}{g} \cos QZ$$

die Werthe $\cos QX = \frac{ec}{ag} \cos QZ$ und $\cos QY = \frac{fc}{bg} \cos QZ$ in die Gl. 3 substituiren. Dadurch erhalten wir die einfache Gleichung

$$4) \quad eu + fv + gw = 0.$$

Die Gl. 4 nennen wir die Zonengleichung. Die hervorragende Wichtigkeit derselben wollen wir an einigen Beispielen erläutern.

Fig. 4.



Erstes Beispiel. Die Figur 4 repräsentirt die am Granat häufig vorkommende Combination $\infty O \,.\, mOm$. Es ist m zu ermitteln. Die 3 Flächen e, r und s sind tautozonal, denn sie sind der Combinationskante e : r parallel.

Die Indices der Fläche

e sind: 1 0 1,

der Fläche s „ : 0 1 1,

der Fläche r „ : $\frac{1}{m}$ $\frac{1}{m}$ 1

oder 1 1 m,

denn, da parallele Flächen als identische betrachtet werden, so darf man jeden der 3 Indices mit einer beliebigen Zahl multipliciren oder dividiren. In unserem Falle ist jeder der 3 Indices mit m multiplicirt worden.

Nun bilden wir zunächst aus den Indices von e und s die in der Zonengleichung vorkommenden Grössen u, v und w nach folgendem Schema:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\underset{u}{\bar{1}} \ \underset{v}{\bar{1}} \ \underset{w}{1} = \underset{u}{1} \ \underset{v}{1} \ \underset{w.}{\bar{1}}$$

Der über 1 stehende Strich ist das Minuszeichen. Auch im folgenden schreiben wir das Minuszeichen über den Index, nicht vor ihn. Es ist daher stets $\bar{h} = - h$.

Setzt man diese Werthe für u, v und w in die Gl. 4 und setzt in derselben Gleichung für e, f, g die Indices 1, 1, m der Fläche e in Fig. 4, so erhält man:

$$1 + 1 - m = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt $m = 2$.

Die Combination Fig. 4 weist mithin die Flächen

$$\infty O \,.\, 2O2 \text{ auf.}$$

Zweites Beispiel. Eine Fläche liege in zwei Zonen zugleich, man soll ihre Indices finden.

Die 2 Zonen, in denen die Fläche liegt, wollen wir bezeichnen durch (u v w) und (u′ v′ w′). Es werden u, v, w aus den Indices zweier Flächen der ersten Zone und u′, v′, w′ aus den Indices zweier Flächen der zweiten Zone nach dem bekannten Schema gebildet. — Die zu suchenden Indices der Fläche seien e, f, g. Weil diese Fläche in der Zone (u v w) liegt, muss nach Gl. 4

$$eu + fv + gw = 0 \text{ sein.}$$

Weil sie in der Zone (u′ v′ w′) liegt, muss

$$eu' + fv' + gw' = 0 \text{ sein.}$$

Dividirt man beide Gleichungen durch f und ermittelt dann $\frac{e}{f}$ und $\frac{g}{f}$, so erhält man:

$$\frac{e}{f} = \frac{vw' - v'w}{wu' - w'u} \text{ und } \frac{g}{f} = \frac{uv' - u'v}{wu' - w'u}.$$

Da einer der 3 Indices willkürlich gewählt werden kann, weil es ja immer nur auf das Verhältniss der Indices ankommt, so können wir $f = wu' - w'u$ setzen und erhalten alsdann:

$$5) \left\{ \begin{aligned} e &= vw' - v'w, \\ f &= wu' - w'u, \\ g &= uv' - u'v. \end{aligned} \right.$$

Die Werthe von e, f und g werden wieder nach folgendem Schema gebildet:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} u & v & & w & & u & & v \\ u' & v' & \times & w' & \times & u' & \times & v' \end{matrix} \\ \hline vw' - v'w, \quad wu' - w'u, \quad uv' - u'v \\ e \qquad\qquad\quad f \qquad\qquad\quad g. \end{array}$$

Drittes Beispiel. Es soll bewiesen werden, dass die 3 Flächen k e f' der Fig. 18 tautozonal sind.

Die Indices von k seien: $0, \bar{1}, 1$
„ „ „ e seien: n, m, mn
„ „ „ f' seien: n, mn, m

Man suche erst die Ableitungszahlen. Die reciproken Werthe derselben sind die Indices.

Zunächst bilden wir aus den Indices der Flächen k und e nach dem bekannten Schema: u, v und w

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & \bar{1} & & 1 & & 0 & \bar{1} \\ n, & m, & \times & mn, & \times & n, & m \end{matrix} \\ \hline -mn \quad -m, \qquad n, \quad n. \end{array}$$

Setzen wir diese Werthe für u, v, w in die Zonengleichung und statt e, f und g die Indices der Fläche f', so erhalten wir

$$-mn^2 - mn + mn^2 + mn = 0.$$

Da die linke Seite gleich Null ist, so liegen die 3 Flächen k, e und f' in einer Zone.

Fig. 5.

P' S Q P

Dritte Aufgabe. Man soll die Beziehung zwischen den Indices und Entfernungen von 4 tautozonalen Flächen angeben (s. Fig. 5).

Es seien die Indices von

P : h k l,
P': h' k' l',
Q : e f g,
S : p q r.

Die Gleichungen a, b und c (Seite 6) drücken aus, dass die 3 Flächen P, Q, P' tautozonal sind.

Dividiren wir jede dieser 3 Gleichungen durch sin P'Q, eliminiren $\frac{\sin P'P}{\sin P'Q}$ und suchen $\frac{\sin PQ}{\sin P'Q}$, so erhalten wir die 3 Gleichungen

$$\frac{\sin PQ}{\sin P'Q} = \frac{\cos PY \cos QX - \cos PX \cos QY}{\cos P'X \cos QY - \cos P'Y \cos QX}$$
$$= \frac{\cos PX \cos QZ - \cos PZ \cos QX}{\cos P'Z \cos QX - \cos P'X \cos QZ}$$
$$= \frac{\cos PZ \cos QY - \cos PY \cos QZ}{\cos P'Y \cos QZ - \cos P'Z \cos QY}.$$

Drückt man die in vorstehenden Gleichungen vorkommenden Producte vermittelst der folgenden bekannten Gleichungen aus:

$$\frac{a}{h} \cos PX = \frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ,$$
$$\frac{a}{h'} \cos P'X = \frac{b}{k'} \cos P'Y = \frac{c}{l'} \cos P'Z,$$
$$\frac{a}{e} \cos QX = \frac{b}{f} \cos QY = \frac{c}{g} \cos QZ,$$

so erhält man nach leichten Reductionen

$$\text{e)} \left\{ \begin{aligned} \frac{\sin PQ}{\sin P'Q} &= \frac{ke - fh}{fh' - ek'} \cdot \frac{h' \cos PX}{h \cos P'X}, \\ &= \frac{gh - le}{el' - gh'} \cdot \frac{h' \cos PX}{h \cos P'X}, \\ &= \frac{lf - kg}{k'g - fl'} \cdot \frac{h' \cos PX}{h \cos P'X}. \end{aligned} \right.$$

Vertauscht man in diesen Gleichungen Q mit S und setzt an Stelle der Indices von Q die von S, setzt mithin p statt e und q statt f und r statt g, so erhält man

$$\frac{\sin PS}{\sin P'S} = \frac{kp - qh}{qh' - pk'} \cdot \frac{h' \cos PX}{h \cos P'X},$$
$$= \frac{rh - lp}{pl' - rh'} \cdot \frac{h' \cos PX}{h \cos P'X},$$
$$= \frac{lq - kr}{k'r - ql'} \cdot \frac{h' \cos PX}{h \cos P'X}.$$

Die Gleichungen a, b und c, aus denen die vorstehenden Gleichungssysteme entstanden sind, wurden unter der Bedingung abgeleitet: $PQ < PP'$, folglich gelten auch sie und die aus ihnen abgeleiteten Gleichungen unter der Bedingung

$$PQ < PP' \text{ und}$$
$$PS < PP'.$$

Dividirt man die 2 letzten Gleichungssysteme durch einander, so erhält man die Beziehung zwischen den Indices und Entfernungen von 4 tautozonalen Flächen in folgender Form:

$$6)\left\{\begin{aligned}\frac{\sin PQ\,.\,\sin P'S}{\sin P'Q\,.\,\sin PS} &= \frac{ke-fh}{fh'-ek'}\cdot\frac{qh'-pk'}{kp-qh},\\ &= \frac{gh-le}{el'-gh'}\cdot\frac{pl'-rh'}{rh-lp},\\ &= \frac{lf-kg}{k'g-fl'}\cdot\frac{k'r-ql'}{lq-kr}.\end{aligned}\right.$$

Der vorstehenden Gleichung kann man noch eine andere Gestalt geben. Es ist:

$$\frac{\sin PQ\,.\,\sin P'S}{\sin PS\,.\,\sin P'Q} = \frac{\sin PQ\,.\,\sin (PP'-PS)}{\sin PS\,.\,\sin (PP'-PQ)} = \rho,$$

wenn man $\rho = \frac{ke-fh}{fh'-ek'}\cdot\frac{qh'-pk'}{kp-qh} = \ldots.$ setzt.

Führen wir den Hilfswinkel φ ein und setzen:

$$7)\ \operatorname{tg}\varphi = \rho\,\frac{\sin (PP'-PQ)}{\sin PQ},$$

so folgt aus der letzten Gleichung

$$\frac{\sin (PP'-PS)}{\sin PS} = \operatorname{tg}\varphi.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$1+\operatorname{tg}\varphi = 1+\frac{\sin (PP'-PS)}{\sin PS} = \frac{2\sin\frac{PP'}{2}\cos\left(PS-\frac{PP'}{2}\right)}{\sin PS},$$

$$1-\operatorname{tg}\varphi = 1-\frac{\sin (PP'-PS)}{\sin PS} = \frac{2\cos\frac{PP'}{2}\sin\left(PS-\frac{PP'}{2}\right)}{\sin PS}.$$

Durch Division der beiden letzten Gleichungen ergibt sich

$$\frac{1+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi} = \operatorname{tg}\frac{PP'}{2}\operatorname{ctg}\left(PS-\frac{PP'}{2}\right) \text{ oder,}$$

da $\frac{1+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi} = \operatorname{tg}(45+\varphi)$ und $\frac{1}{\operatorname{tg}(45+\varphi)} = \operatorname{tg}(45-\varphi)$ ist,

$$8)\ \operatorname{tg}\left(PS-\frac{PP'}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{PP'}{2}\operatorname{tg}(45-\varphi).$$

Der Gl. 6 kann man noch eine dritte Gestalt geben. Es ist

$$\frac{\sin PQ}{\sin P'Q} = \frac{\sin PQ}{\sin (PP' - PQ)} = \frac{1}{\sin PP' [\operatorname{ctg} PQ - \operatorname{ctg} PP']},$$

$$\frac{\sin P'S}{\sin PS} = \frac{\sin (PP' - PS)}{\sin PS} = \frac{\sin PP' [\operatorname{ctg} PS - \operatorname{ctg} PP']}{1}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gl. 6, so erhält man sofort

$$9) \left\{ \begin{aligned} \frac{\operatorname{ctg} PS - \operatorname{ctg} PP'}{\operatorname{ctg} PQ - \operatorname{ctg} PP'} &= \frac{ke - fh}{fh' - ek'} \cdot \frac{qh' - pk'}{kp - qh}, \\ &= \frac{gh - le}{el' - gh'} \cdot \frac{pl' - rh'}{rh - lp}, \\ &= \frac{lf - kg}{k'g - fl'} \cdot \frac{k'r - ql'}{lq - kr}. \end{aligned} \right.$$

Diese Form der Gleichung ist desswegen sehr wichtig, weil in den Systemen mit rechtwinkligen Axen es meistens möglich ist, $PP' = 90$ zu setzen.

Vermöge der Gl. 9 kann man aus den Indices der 4 Flächen P, Q, S, P' und zweien Winkeln den dritten Winkel finden.

Vierte Aufgabe. Aus den Winkeln, welche 4 tautozonale Flächen mit einander bilden, und den Indices dreier dieser Flächen die Indices der vierten Fläche zu finden.

Gegeben (s. Fig. 5): PP', PQ, PS, ferner hkl und h'k'l' und efg.

Gesucht die Indices von S: p, q, r.

Aus den Gl. e (Seite 11) folgt:

$$\frac{ke - fh}{fh' - ek'} = \frac{gh - le}{el' - gh'} = \frac{lf - kg}{k'g - fl'}.$$

Die vorstehenden Quotienten bilden den ersten Faktor rechter Hand der Gl. 6 und 9. Beide Gl. 6 und 9 sind zur Lösung der Aufgabe 4 geeignet. Bringt man diesen Faktor in Gl. 9 auf die linke Seite, so erhalten wir:

$$\frac{qh' - pk'}{kp - qh} = \frac{pl' - rh'}{rh - lp} = \frac{k'r - ql'}{lq - kr} = \lambda,$$

wenn man abkürzungsweise setzt (s. Gl. 6 und 9):

$$
10)\left\{\begin{aligned}
\lambda &= \frac{fh'-ek'}{ke-fh}\cdot\frac{\operatorname{ctg}PS-\operatorname{ctg}PP'}{\operatorname{ctg}PQ-\operatorname{ctg}PP'} = \frac{fh'-ek'}{ke-fh}\cdot\frac{\sin PQ.\sin SP'}{\sin QP'.\sin SP}\\
&= \frac{el'-gh'}{gh-el}\cdot\frac{\operatorname{ctg}PS-\operatorname{ctg}PP'}{\operatorname{ctg}PQ-\operatorname{ctg}PP'} = \frac{el'-gh'}{gh-el}\cdot\frac{\sin PQ.\sin SP'}{\sin P'Q.\sin SP}\\
&= \frac{k'g-fl'}{lf-kg}\cdot\frac{\operatorname{ctg}PS-\operatorname{ctg}PP'}{\operatorname{ctg}PQ-\operatorname{ctg}PP'} = \frac{k'g-fl'}{lf-kg}\cdot\frac{\sin PQ.\sin SP'}{\sin P'Q.\sin SP}
\end{aligned}\right.
$$

Aus der obigen Gleichung folgt, wenn man Zähler und Nenner eines jeden der 3 Brüche durch p dividirt und sodann $\frac{q}{p}$ und $\frac{r}{p}$ ermittelt,

$$\frac{q}{p} = \frac{k' + \lambda k}{h' + \lambda h} \text{ und } \frac{r}{p} = \frac{l' + \lambda l}{h' + \lambda h}.$$

Da es immer nur auf das Verhältniss der Parameter und nicht auf den absoluten Werth derselben ankommt, so kann man einen der 3 Indices willkürlich annehmen. Setzen wir hier $p = h' + \lambda h$, so sind die 3 gesuchten Indices der Fläche

$$
11)\left\{\begin{aligned}
p &= h' + \lambda h,\\
q &= k' + \lambda k,\\
r &= l' + \lambda l.
\end{aligned}\right.
$$

Der Werth von λ ist aus Gl. 10 zu entnehmen.

Die entwickelten Gleichungen gelten ganz allgemein; denn sie sind für ein schiefwinkliges Axensystem abgeleitet. Die Gl. 2 und 4 sind die wichtigsten, weil sie am häufigsten Anwendung finden. Sie genügen in der Regel allein zur Berechnung der einzelnen Formen und complicirter Combinationen.

Projection der Krystallflächenpole.

§. 4.

Die Abbildung der Krystalle und Combinationen zum Zwecke der Berechnung derselben geschieht nach der stereographischen Projection, die in ihren Grundzügen nun erläutert werden soll.

Um den Mittelpunkt des Krystalls denke man sich eine Kugel mit beliebigem Radius construirt, ziehe vom Mittelpunkte

aus Normale auf die Krystallflächen und verlängere sie, bis sie die Oberfläche der Kugel durchstechen. Diese Durchstechungspunkte, Pole genannt, sind nun auf eine Ebene zu projiciren. Da einer jeden Krystallfläche eine parallele Gegenfläche entspricht, so entspricht jedem einzelnen Pole ein zweiter Pol auf der anderen Hälfte der Kugel, der mit dem ersten und dem Mittelpunkte der Kugel in derselben geraden Linie liegt. Da parallele Flächen als identische betrachtet werden, so ist es nur nothwendig, die Pole einer Halbkugel auf eine Ebene zu projiciren. Denken wir uns den Krystall richtig gestellt, so dass die Hauptaxe oder Verticalaxe auch vertical steht, und legen durch den Mittelpunkt des Axensystems eine Ebene senkrecht zur Haupt- oder Verticalaxe, so schneidet diese die Oberfläche der Kugel in einem grössten Kreise g (Fig. 7), und dieser grösste Kreis, der von nun an Grundkreis genannt wird, wird zur Projectionsebene gewählt. Die Projection kann auf verschiedene Weise erfolgen.

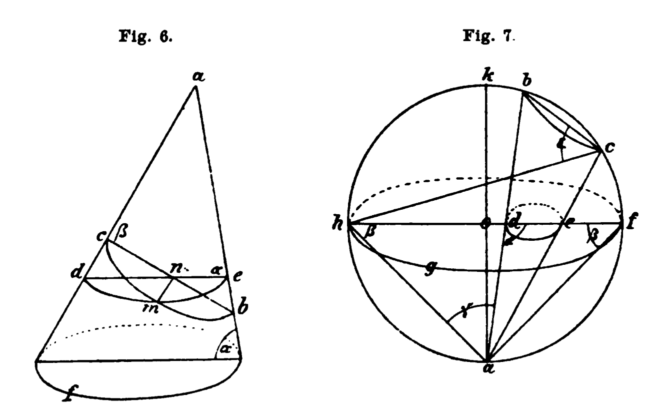
Wir werden stets die Pole auf der oberen Hälfte der Halbkugel auf den Grundkreis in folgender Weise projiciren. Das Auge a (Fig. 7) denken wir uns in dem unteren Theil der Oberfläche der Kugel da, wo diese von der Haupt- oder Verticalaxe getroffen wird. Der Augpunkt ist somit der Pol des Grundkreises in der unteren Hälfte der Kugel. Verbinden wir jeden Pol der oberen Hälfte der Halbkugel mit diesem Augpunkte, so durchsticht die Verbindungslinie den Grundkreis in Punkten, welche die Projection der Pole auf den Grundkreis bilden. Die Construction dieser Punkte ist zur Berechnung nicht absolut nothwendig. Zur Berechnung genügt es, wenn sie ungefähr richtig in den Grundkreis eingetragen werden.

Da aber eine exacte Construction der Punkte auf dem Grundkreise ein anschauliches Bild der Vertheilung der Flächen gibt, die wichtigsten Zonen dem Auge vorführt, die Rechnung fördert und erleichtert und zugleich eine Controle für die Rechnung selbst bietet, so wird sie hier auseinandergesetzt und bei der Berechnung durchgeführt.

Zunächst ist zu untersuchen, welche Curve die Projection irgend eines Kreises der Halbkugel auf der Grundebene bildet.

Jeder grösste Kreis, der durch den Augpunkt a und folglich auch durch den oberen Pol des Grundkreises geht, schneidet den Grundkreis in zwei diametral gegenüberliegenden Punkten. Die Projection eines solchen Kreises ist mithin eine durch den Mittelpunkt des Grundkreises gehende gerade Linie.

Die Projection eines beliebigen Kreises bc (s. Fig. 7) auf den Grundkreis ist stets ein Kreis. Dieser wichtige Satz soll nun bewiesen werden.



Denken wir uns einen schiefen Kegel (s. Fig. 6) mit kreisförmiger Basis f, so wird jeder Schnitt dme parallel der Basis wieder ein Kreis sein; jeder andere Schnitt durch den Kegel wird in der Regel eine Ellipse sein; in einem besonderen Falle, und das ist gerade der Fall, der für uns von Wichtigkeit ist, ist er ein Kreis. Führen wir durch den schiefen Kegel den Schnitt bc so, dass $\sphericalangle \alpha = \beta$ wird, so ist der Schnitt cmb ein Kreis. Wir nehmen an, die Ebene dae, in welcher die Axe des Kegels liegt, sei auf dem Grundkreise f und folglich auch auf dem parallelen Schnitt de senkrecht. Ziehen wir von dem beliebigen Punkte m der Curve cb eine Senkrechte mn auf den Durchmesser cb, so ist mn auch senkrecht auf dem Durchmesser de, denn dieser liegt in der Ebene dae, auf welcher mn senkrecht ist. Da dme ein Kreis ist, so folgt:

$$(mn)^2 = dn \, . \, ne.$$

Weil $\alpha = \beta$ vorausgesetzt wird, ist $\triangle$ cnd $\backsim$ neb, folglich ist dn : cn = nb : ne. Daraus folgt

$$dn \,.\, ne = cn \,.\, nb.$$

Setzen wir diesen Werth in obige Gleichung, so ist

$$(mn)^2 = cn \,.\, nb.$$

Die letzte Gleichung ist aber nur möglich, wenn cmb ein Kreis ist.

In Fig. 7 sei bc ein beliebiger Kreis auf der Oberfläche der Kugel. Durch den Mittelpunkt dieses Kreises und den Augpunkt a legen wir den grössten Kreis khaf, welcher auf der Ebene des Kreises bc senkrecht sein muss. Legen wir durch den Mittelpunkt o der Kugel eine Ebene senkrecht zu ao, so schneidet diese die Oberfläche der Kugel in der Projectionsebene, dem sogenannten Grundkreise g. Verbinden wir den Augpunkt a mit jedem Punkte des Kreises bc, so durchstechen diese Linien den Grundkreis in Punkten, die die Curve de bilden. Kann bewiesen werden, dass $\sphericalangle\, \alpha =$ bca ist, so muss nach dem Vorhergehenden die Curve de ein Kreis sein. Der Durchmesser des Kreises bc sei die Linie bc. Man erkennt sogleich, dass die Punkte h, o, d, e, f in einer geraden Linie liegen. Erinnert man sich nun des Satzes, dass Peripheriewinkel auf demselben Bogen gleich sind, so ergibt sich

$$\alpha = \beta + \gamma = \beta + \varepsilon = hca + \varepsilon = bca.$$

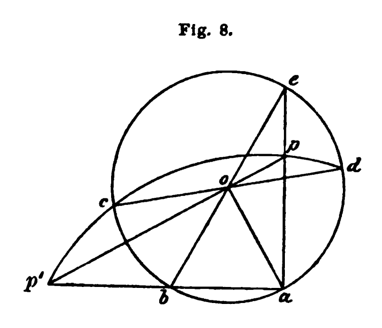
Mithin ist die Projection de des beliebigen Kreises bc auf den Grundkreis g ein Kreis.

Ist der beliebige Kreis ein grösster Kreis, so schneidet er den Grundkreis in zwei entgegengesetzten Punkten, die mit dem Mittelpunkt o des Grundkreises in einer geraden Linie liegen. Ist einer dieser zwei Punkte gegeben, so erhält man den zweiten, indem man den ersten mit dem Mittelpunkte verbindet und die Verbindungslinie bis zum Schnitt mit dem Grundkreise verlängert. Der Schnittpunkt ist der zweite entgegengesetzte Punkt.

Ist irgend ein Punkt der Projection eines grössten Kreises gegeben, so muss man den entgegengesetzten, der mit ihm und dem Mittelpunkte des Grundkreises in einer geraden Linie liegt, construiren können.

Erste Aufgabe. Aus der Projection irgend eines Punktes p eines grössten Kreises der Kugel den entgegengesetzten Punkt p′ zu construiren.

Fig. 8.



Angenommen, p′ in Fig. 8 sei der gesuchte Punkt und o der Mittelpunkt des Grundkreises, so müssen die 3 Punkte p, o und p′ in einer geraden Linie liegen. Legen wir nun durch p und p′ einen beliebigen Kreis, der aber die Projection eines grössten Kreises der Kugel sein muss, so schneidet dieser den Grundkreis in zwei Punkten c und d, welche mit o wieder in einer geraden Linie liegen müssen. Nennen wir den Radius des Grundkreises $co = od = r$, so ist nach einem bekannten Satze der Geometrie

$$po \,.\, p'o = co \,.\, od = r^2.$$

Da po und r bekannt sind, so lässt sich aus dieser Gleichung p′o construiren. Errichtet man ao senkrecht auf po, verbindet a mit p und zieht $ap' \perp ap$, so ist nach einem Satze der Geometrie

$$ao^2 = r^2 = p'o \,.\, po.$$

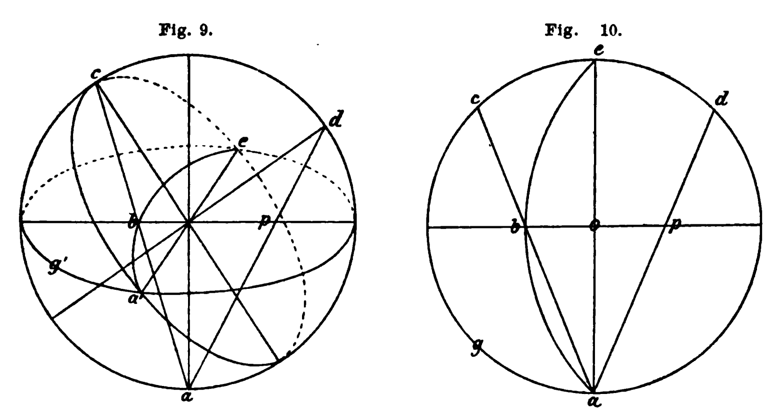
Der rechte Winkel $p'ap = bae$ ist, wie man sieht, Peripheriewinkel über dem Durchmesser be des Grundkreises. Daraus folgt nachstehende Construction.

Man verlängere po, ziehe $ao \perp po$, verbinde a mit p, verlängere bis e, verlängere eo bis b, verbinde a mit b und verlängere, so ist der Schnittpunkt von po und ab der gesuchte Punkt.

Zweite Aufgabe. Aus der gegebenen Projection abe (Fig. 10) eines grössten Kreises die Projection des Poles des Kreises zu finden.

Die Fig. 9 gibt eine perspectivische Darstellung der Lösung der Aufgabe. Der Grundkreis ist in Fig. 9 durch g′, in Fig. 10 durch g bezeichnet. Die gegebene Projection des grössten

Kreises ist in Fig. 9 a′be, in Fig. 10 abe. Der grösste Kreis selbst, dessen Projection in Fig. 9 a′be ist, ist a′ce. Der Pol dieses Kreises ist in Fig. 9 der Punkt d. Verbindet man den Punkt d mit dem Augpunkt a (Fig. 9), so durchschneidet die



Verbindungslinie die Linie bp in dem Punkte p, der die Projection des Punktes d auf den Grundkreis bildet. Klappt man adc (Fig. 9) um bp in die Ebene g′, so kommt a nach a′. Daher die Construction. abe in Fig. 10 ist die gegebene Projection. Ziehe ae und bo ⊥ ae, verbinde a mit b und verlängere bis c, mache cod = 90° oder cad = 45°, verbinde d mit a, so ist p der gesuchte Pol.

Dritte Aufgabe. Aus der Projection e′f′ zweier Punkte (Fig. 11) eines grössten Kreises ihren Abstand auf der Kugeloberfläche anzugeben.

In Fig. 12 sei gb der Grundkreis und a der Pol (Augpunkt) desselben, ceb sei ein zweiter grösster Kreis der Kugeloberfläche, dessen Pol d sei. Verbinden wir d mit a und legen durch da eine beliebige Ebene dega, so schneidet diese den Grundkreis in g, den Kreis ceb in e, und es muss be = bg sein; denn drehen wir die Ebene aged um ad, bis sie durch b geht, so ist in den Dreiecken deb und abg, de = ag, db = ab und ∢ edb = ∢ bag, folglich be = bg. Die Projection des Kreises dega auf dem Grundkreis ist die gerade Linie gp, weil der Kreis durch a geht. Die Projection e′ des Punktes e des Kreises ceb liegt mithin in der Linie gp. Nun

denke man sich auf dem Kreis bec (Fig. 12) noch einen zweiten Punkt f, drehe die Ebene age um ad, bis sie durch f geht, bezeichne die Projection von f auf dem Grundkreis mit f′, verlängere pf′, bis der Grundkreis in h geschnitten wird, so ist auch bf = bh, folglich auch ef = gh. Daher die Construction.

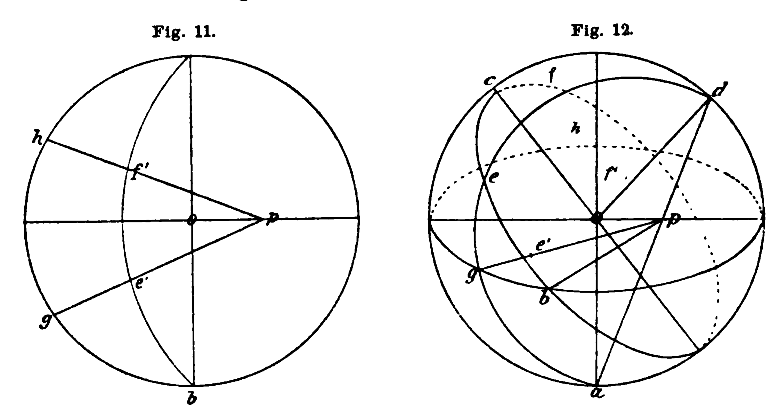


Fig. 11. Fig. 12.

Die Projectionen (s. Fig. 11) der 2 Punkte des grössten Kreises seien e′ und f′. Man construire den Kreis be′f′ und suche den Pol p desselben, ziehe pe′ und pf′ und verlängere, so ist hg der gesuchte Abstand der 2 Punkte auf der Oberfläche der Kugel und hog der Winkel, den sie bilden.

Vierte Aufgabe. Auf der Projection be′f′ eines grössten Kreises (Fig. 11) den Punkt f′ anzugeben, der von dem Punkte e′ desselben Kreises um den Winkel α auf der Kugeloberfläche entfernt ist.

Man suche die Projection des Poles p des Kreises be′f′ und ziehe pe′, verlängere bis g, mache goh $= \alpha$, verbinde h mit p, so ist f′ der gesuchte Punkt.

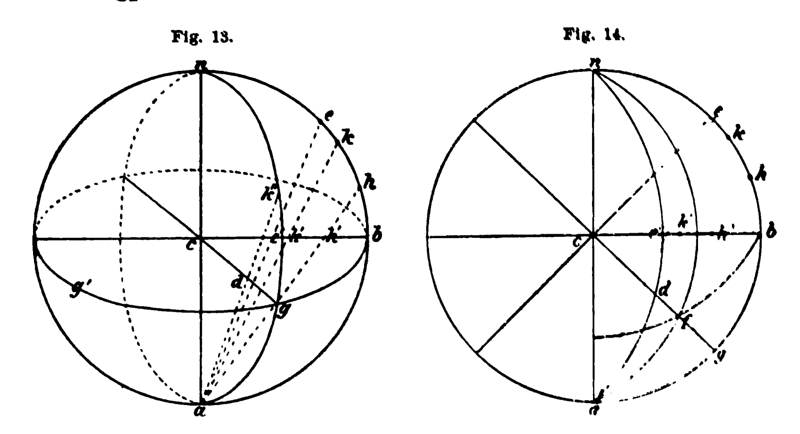
Fünfte Aufgabe. Aus den Projectionen zweier grösster Kreise den Winkel zu finden, den die Ebenen dieser Kreise in Wirklichkeit mit einander machen.

Der gesuchte Winkel ist gleich dem Abstande der beiden Pole dieser 2 grössten Kreise. Man suche daher die Pole der 2 grössten Kreise und dann den Abstand derselben auf der Kugeloberfläche.

Anwendung der vorhergehenden Sätze.

Man soll O, ∞O, ∞O∞ und mO projiciren.

In Fig. 13 ist die Lösung durch eine perspectivische Figur erläutert. In Fig. 14 ist die Lösung selbst. In Fig. 13 ist a der Augpunkt und g′ der Grundkreis, ∢ b c g = 45°. Der



Vergleich beider Figuren zeigt, dass in Fig. 14 a, b und c die Projectionen von Würfelflächen, und g und e die Projectionen von Rhombendodekaëderflächen sind. Die Rhombendodekaëderfläche e′ erhält man (Fig. 14), indem man e mit a verbindet. Die Verbindungslinie trifft die Linie c b in der Projection des gesuchten Poles e′ der Rhombendodekaëderfläche.

Die Oktaëderfläche liegt in der Zone g c (Fig. 14, s. Gl. 4) und liegt auch in der Zone a e′ (s. Gl. 4), mithin hat man einen Kreisbogen zu construiren, der durch die 3 Punkte a, e′, n geht. Wo dieser Bogen die Linie c g durchschneidet, da ist der gesuchte Punkt d der Projection einer Oktaëderfläche. Dass man die anderen Punkte, welche Oktaëderflächen repräsentiren, in analoger Weise erhält, bedarf kaum der Erwähnung. Auch auf folgende Weise kann man d erhalten. Die Normale c n (s. Fig. 13) auf die Würfelfläche und die Normale c k″ auf die Oktaëderfläche bilden einen Winkel von 54° 44′. Verbindet man a mit k″, so durchschneidet diese Verbindungslinie die

Linie c g in dem gesuchten Punkte d. Man denke sich nun die Ebene n g a um n a gedreht, bis sie mit n b a zusammenfällt, mache (s. Fig. 13 und 14) $nk = 54^0 44'$, verbinde k mit a und mache $ck' = cd$, so ist d die gesuchte Projection. Auch durch Rechnung kann man c d leicht finden; denn da (s. Fig. 13)

$\sphericalangle\, nak'' = nad = \frac{54^0 44'}{2} = 27^0 22'$ ist, so folgt, wenn wir den Radius $ca = 1$ setzen: $\text{tg}\, 27^0 22' = cd$.

Die Normale auf die Pyramidenoktaëderfläche f (s. Fig. 14) bilde mit der Normale auf die Würfelfläche den Winkel $70^0 31' 40''$. Mache n h (Fig. 14) $= 70^0 31' 40''$, verbinde h mit a und mache $ch' = cf$, so ist f die gesuchte Projection der Pyramidenoktaëderfläche. Es fragt sich nun, welche Indices hat die Fläche f? Ihre Indices seien h h 1, folglich ist ihre Gleichung (nach Gl. 2), wenn man die Parameter a, b, c der Grundebene gleich 1, 1, 1 setzt:

$$\frac{\cos fa}{h} = \frac{\cos fb}{h} = \frac{\cos fc}{1},$$

woraus

$$h = \frac{\cos fb}{\cos fc}.$$

Nun ist in dem sphärischen Dreieck f b c die Seite $fc = 70^0 31' 40''$, ferner $bc = 90$ und $fcb = 45$, folglich ergibt sich:

$$fb = 48^0 11'.$$

Mithin

$$h = 2.$$

Mithin ist

$$f = 2\,O.$$

Weitere Anwendungen siehe bei der Entwickelung complicirter Combinationen.

§. 5.

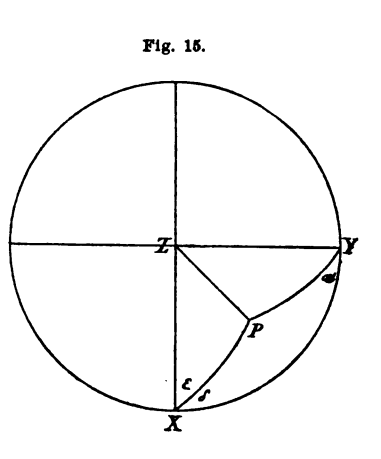
In dem Vorhergehenden wurde gezeigt, wie man aus der Projection zweier Punkte den Abstand derselben auf der Oberfläche der Kugel finden kann. Soll die Rechnung hinter der Construction nicht zurückbleiben, so muss noch gezeigt werden, wie man aus den Indices zweier Flächen den Abstand der Pole

auf der Oberfläche der Kugel berechnen kann. Die Formeln, die sich hierbei ergeben, können zur Berechnung der Krystalle, wie wir zeigen werden, gleichfalls dienen. Der Controle wegen sind sie daher schon höchst werthvoll; ausserdem führen sie manchmal schneller zum Ziel und liefern dem Analytiker interessante Gleichungen zur Umformung.

Während die vorhergehenden Untersuchungen für alle Axensysteme Geltung hatten, müssen wir nun die Entwickelung für rechtwinklige und schiefwinklige Axen getrennt vornehmen.

In Fig. 15 seien X, Y und Z die Projectionen der Endpunkte recktwinkliger Axen auf den Grundkreis, und es sei P die Projection eines Poles irgend einer Fläche. Die Aufgabe, die Entfernung zweier Pole aus den Indices zu berechnen, kommt darauf zurück, die Entfernungen PX, PY und PZ zu finden. Die Indices des Punktes P seien h, k, l. Die Gleichung der Fläche P ist mithin (s. Gl. 2), wenn a, b und c die Axenlängen sind:

Fig. 15.



$$\alpha)\ \frac{a}{h}\cos PX = \frac{b}{k}\cos PY = \frac{c}{l}\cos PZ.$$

Aus den sphärischen Dreiecken XPY und XPZ folgt:

$$\beta)\ \cos PX = \sin PY \cos \alpha',$$
$$\cos PZ = \sin PY \sin \alpha'.$$

Durch Division der beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{\cos PZ}{\cos PX} = \operatorname{tg} \alpha'.$$

Aus der ersten Gl. α ergibt sich

$$\frac{\cos PZ}{\cos PX} = \frac{al}{ch}.$$

Mithin

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{al}{ch}.$$

Aus der Gl. α folgt:

$$\cos PX = \frac{bh}{ak} \cos PY.$$

Setzt man diesen Werth in Gl. β, so ergibt sich

$$\frac{bh}{ak} \cos PY = \sin PY \cos \alpha',$$

woraus

$$\operatorname{tg} PY = \frac{bh}{ak} \frac{1}{\cos \alpha'} = \frac{bh}{ak} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha'}$$

$$= \frac{bh}{ak} \sqrt{1 + \frac{a^2 l^2}{c^2 h^2}} \qquad \operatorname{tg} PY = \frac{b}{ak} \frac{\sqrt{a^2 l^2 + c^2 h^2}}{c}.$$

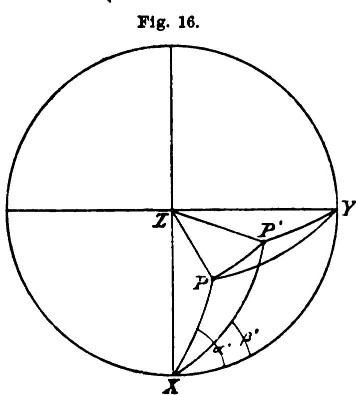
Daraus folgt auch leicht

$$\cos PY = \frac{(ac)\,k}{\sqrt{(ab)^2 l^2 + (ac)^2 k^2 + (bc)^2 h^2}}.$$

In analoger Weise oder auch durch Vertauschung der entsprechenden Indices erhält man hieraus

$$12) \begin{cases} \cos PX = \dfrac{(bc)\,h}{\sqrt{(ab)^2 l^2 + (ac)^2 k^2 + (bc)^2 h^2}} \\ \cos PY = \dfrac{(ac)\,k}{\sqrt{(ab)^2 l^2 + (ac)^2 k^2 + (bc)^2 h^2}} \\ \cos PZ = \dfrac{(ab)\,l}{\sqrt{(ab)^2 l^2 + (ac)^2 k^2 + (bc)^2 h^2}}. \end{cases}$$

Fig. 16.



Aus diesen 3 Gleichungen folgt sofort der Satz:

$$13) \cos^2 PX + \cos^2 PY + \cos^2 PZ = 1.$$

Es seien nun in Fig. 16 P und P' die Projectionen der Pole zweier Krystallflächen auf den Grundkreis und es seien die Indices von P : h k l, von P' : h' k' l'.

Aus dem sphärischen Dreieck PP'X folgt

$$\cos PP' = \cos PX \cos P'X + \sin PX \sin P'X \cos(\alpha' - \beta')$$

oder

$$\gamma)\ \cos PP' = \cos PX \cos P'X + \sin PX \sin P'X.$$
$$[\cos \alpha' \cos \beta' + \sin \alpha' \sin \beta'].$$

Die Werthe für cos PX und cos P'X ergeben sich aus den folgenden Gleichungen (s. Gl. 12):

$$\cos PX = \frac{(bc)\,h}{N}, \quad \cos P'X = \frac{(bc)\,h'}{N'},$$

worin

$$N = \sqrt{(ab)^2\, l^2 + (ac)^2\, k^2 + (bc)^2\, h^2}$$

und

$$N' = \sqrt{(ab)^2\, l'^2 + (ac)^2\, k'^2 + (bc)^2\, h'^2}.$$

Die Werthe für cos α' und cos β' ergeben sich aus den sphärischen Dreiecken PXY und P'XY.

$$\cos PY = \sin PX \cos \alpha',$$
$$\cos P'Y = \sin P'X \cos \beta',$$

woraus

$$\cos \alpha' = \frac{\cos PY}{\sin PX} = \frac{\cos PY}{\sqrt{1 - \cos^2 PX}}$$

und

$$\sin \alpha' = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 PX - \cos^2 PY}}{\sin PX},$$

$$\cos \beta' = \frac{\cos P'Y}{\sin P'X} = \frac{\cos P'Y}{\sqrt{1 - \cos^2 P'X}}$$

und

$$\sin \beta' = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 P'X - \cos^2 P'Y}}{\sin P'X}.$$

Setzt man diese Werthe in Gl. γ, so ergibt sich

$$\cos PP' = \frac{bch}{N} \cdot \frac{bch'}{N'} + \sin PX \sin P'X.$$

$$\left[\frac{\cos PY}{\sin PX}\,\frac{\text{cn } P'Y}{\sin P'X} + \frac{\sqrt{1-\cos^2 PX-\cos^2 PY}}{\sin PX}\,\frac{\sqrt{1-\cos^2 P'X-\cos^2 P'Y}}{\sin P'X}\right],$$

$$\cos PP' = \frac{(bc)^2\, hh'}{NN'} + \frac{(ac)^2\, kk'}{NN'} + \frac{(ab)^2\, ll'}{NN'}$$
$$= \frac{(bc)^2\, hh' + (ac)^2\, kk' + (ab)^2\, ll'}{NN'}$$

daher

$$14)\cos PP' = \frac{(ab)^2 ll' + (ac)^2 kk' + (bc)^2 hh'}{\sqrt{(ab)^2 l^2 + (ac)^2 k^2 + (bc)^2 h^2}\sqrt{(ab)^2 l'^2 + (ac)^2 k'^2 + (bc)^2 h'^2}}.$$

Da rechtwinklige Axen vorausgesetzt und die Axenlängen oder Parameter der Grundebene gleich a, b, c gesetzt wurden, so gilt die Gl. 14 speciell für das rhombische System.

Setzen wir in Gl. 14: $a = b = 1$, so erhalten wir die für das tetragonale System geltende Gleichung

$$15)\ \cos PP' = \frac{ll' + c^2 (kk' + hh')}{\sqrt{l^2 + c^2 (k^2 + h^2)}\sqrt{l'^2 + c^2 (k'^2 + h'^2)}}.$$

Setzen wir in dieser Gleichung auch noch $c = 1$, so erhalten wir die für das reguläre System geltende Gleichung

$$16)\ \cos PP' = \frac{hh' + kk' + ll'}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}\sqrt{h'^2 + k'^2 + l'^2}}.$$

Setzen wir in Gl. 14: $a = 1$ und $b = \sqrt{3}$, so erhalten wir die für das hexagonale System geltende Gleichung [1])

$$17)\ \cos PP' = \frac{3\,ll' + c^2 kk' + 3\,c^2 hh'}{\sqrt{3l^2 + c^2 k^2 + 3\,c^2 h^2}\sqrt{3l'^2 + c^2 k'^2 + 3\,c^2 h'^2}}.$$

In ganz analoger Weise leiten wir aus den Figuren 15 und 16 die entsprechenden Formeln für das trikline System ab.

Da die 3 Axen mit einander Winkel bilden, die von einem Rechten verschieden sind, so setzen wir (s. Fig. 15):

$$XY = \gamma,\ XZ = \beta \text{ und } YZ = \alpha.$$

Aus dem sphärischen Dreieck ZYX folgt

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\,[\cos\delta\cos\varepsilon - \sin\delta\sin\varepsilon].$$

Aus den sphärischen Dreiecken PYX und PXZ folgt

$$\cos\delta = \frac{\cos PY - \cos PX\cos\gamma}{\sin PX\sin\gamma},\quad \cos\varepsilon = \frac{\cos PZ - \cos PX\cos\beta}{\sin PX\sin\beta},$$

und aus diesen Gleichungen folgt

$$\sin\delta = \frac{\sqrt{\sin^2 PX\sin^2\gamma - (\cos PY - \cos PX\cos\gamma)^2}}{\sin PX\sin\gamma},$$

---

[1]) Die Formen des hexagonalen Systems (siehe dieses) werden berechnet, indem wir sie auf 3 rechtwinklige Axen beziehen, deren eine die Grösse 1, die andere die Grösse $\sqrt{3}$ und die Hauptaxe die Grösse c hat.

$$\sin \varepsilon = \frac{\sqrt{\sin^2 PX \sin^2 \beta - (\cos PZ - \cos PX \cos \beta)^2}}{\sin PX \sin \beta}.$$

Setzt man diese Werthe in die erste Gleichung ein, so erhält man nach einigen Reductionen

$$\begin{aligned} &1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma \\ &= \sin^2 \alpha \cos^2 PX + \sin^2 \beta \cos^2 PY + \sin^2 \gamma \cos^2 PZ \\ &- 2 [(\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma) \cos PY \cos PZ + (\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma). \\ &\cos PX \cos PZ + (\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta) \cos PX \cos PY]. \end{aligned}$$

Sind die Indices der Fläche P: h k l, so ist die Gleichung der Fläche:

$$\frac{a}{h} \cos PX = \frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ.$$

Eliminirt man aus dieser und der vorhergehenden Gleichung cos PY und cos PZ, so erhält man die Gleichung

18)
$$\cos PX = \frac{h b c \sqrt{1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma}}{\sqrt{N}}.$$

Ebenso findet man:

$$\cos PY = \frac{k a c \sqrt{1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma}}{\sqrt{N}},$$

$$\cos PZ = \frac{l a b \sqrt{1 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma}}{\sqrt{N}},$$

worin

$$\begin{aligned} N = {} & h^2 b^2 c^2 \sin^2 \alpha + a^2 c^2 k^2 \sin^2 \beta + a^2 b^2 l^2 \sin^2 \gamma \\ & - 2 a b c [a k l A' + b h l B' + c h k C'] \end{aligned}$$

$$A' = \cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma, \quad B' = \cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma$$

$$C' = \cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta.$$

Aus dem sphärischen Dreieck PXP′ (s. Fig. 16) folgt

$$\cos PP' = \cos PX \cos P'X + \sin PX \sin P'X [\cos \alpha' \cos \beta' + \sin \alpha' \sin \beta'].$$

Aus den sphärischen Dreiecken XPY und XP′Y folgt

$$\cos \alpha' = \frac{\cos PY - \cos PX \cos \gamma}{\sin PX \sin \gamma},$$

$$\cos \beta' = \frac{\cos P'Y - \cos P'X \cos \gamma}{\sin P'X \sin \gamma},$$

und daraus

$$\sin \alpha' = \frac{\sqrt{\sin^2 PX \sin^2 \gamma - (\cos PY - \cos PX \cos \gamma)^2}}{\sin PX \sin \gamma},$$

$$\sin \beta' = \frac{\sqrt{\sin^2 P'X \sin^2 \gamma - (\cos P'Y - \cos P'X \cos \gamma)^2}}{\sin P'X \sin \gamma}.$$

Setzt man diese Werthe in die erste Gleichung ein, so erhält man nach mehreren Reductionen

$$\begin{aligned}(1 - \cos^2 \gamma) \cos^2 PP' - 2 \cos PP' [\cos PY \cos P'Y \\ + \cos PX \cos P'X - (\cos PY \cos P'X + \cos P'Y \cos PX) \cos \gamma] \\ + \cos^2 PX + \cos^2 PY + \cos^2 P'X + \cos^2 P'Y \\ - \cos^2 PY \cos^2 P'X - \cos^2 P'Y \cos^2 PX \\ - 2 \cos \gamma (\cos PX \cos PY + \cos P'X \cos P'Y) + \\ 2 \cos PX \cos P'X \cos PY \cos P'Y - 1 + \cos^2 \gamma = 0.\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung kann man $\cos PP'$ ermitteln. Bequemer ist es, eine analoge Gleichung zu bilden, indem man X mit Z und γ mit α vertauscht. Man erhält alsdann

$$\begin{aligned}(1 - \cos^2 \alpha) \cos^2 PP' - 2 \cos PP' [\cos PY \cos P'Y \\ + \cos PZ \cos P'Z - (\cos PY \cos P'Z + \cos P'Y \cos PZ) \cos \alpha] \\ + \cos^2 PZ + \cos^2 PY + \cos^2 P'Z + \cos^2 P'Y \\ - \cos^2 PY \cos^2 P'Z - \cos^2 P'Y \cos^2 PZ \\ - 2 \cos \alpha (\cos PZ \cos PY + \cos P'Z \cos P'Y) + \\ 2 \cos PZ \cos P'Z \cos PY \cos P'Y - 1 + \cos^2 \alpha = 0.\end{aligned}$$

Eliminirt man aus beiden Gleichungen $\cos^2 PP'$, so erhält man leicht $\cos PP'$. Sind die Indices der Fläche P : h k l, die der Fläche P' gleich h' k' l', so hat man noch aus den beiden Gleichungen

$$\frac{a}{h} \cos PX = \frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ$$

$$\frac{a}{h'} \cos P'X = \frac{b}{k'} \cos P'Y = \frac{c}{l'} \cos P'Z$$

$\cos PY$, $\cos P'Y$, $\cos PZ$ und $\cos P'Z$ zu suchen und die gefundenen Werthe in die Gleichung für $\cos PP'$ zu setzen.

Nach mehreren Reductionen erhält man die Gleichung

$$\cos PP' = \frac{H}{\sqrt{N}\sqrt{N_1}}.$$

In dieser Gleichung ist

$$H = \frac{hh'}{a^2}\sin^2\alpha + \frac{kk'}{b^2}\sin^2\beta + \frac{ll'}{c^2}\sin^2\gamma$$

$$-\frac{kl'+k'l}{bc}A' - \frac{hl'+h'l}{ac}B' - \frac{kh'+k'h}{ab}C'$$

19)

$$N = \frac{h^2}{a^2}\sin^2\alpha + \frac{k^2}{b^2}\sin^2\beta + \frac{l^2}{c^2}\sin^2\gamma$$

$$-2\left[\frac{kl}{bc}A' + \frac{hl}{ac}B' + \frac{kh}{ab}C'\right]$$

$$N_1 = \frac{h'^2}{a^2}\sin^2\alpha + \frac{k'^2}{b^2}\sin^2\beta + \frac{l'^2}{c^2}\sin^2\gamma$$

$$-2\left[\frac{k'l'}{bc}A' + \frac{h'l'}{ac}B' + \frac{k'h'}{ab}C'\right]$$

Es sind $h k l$ die Indices von P und $h' k' l'$ die Indices von P'.

$$A' = \cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma, \quad YZ = \alpha,$$
$$B' = \cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma, \quad XZ = \beta,$$
$$C' = \cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta. \quad XY = \gamma.$$

Setzt man in diesen Gleichungen $\alpha = \beta = \gamma = 90$, so erhält man die Gl. 14.

Um die für das monosymmetrische System geltenden Gleichungen zu erhalten, setzen wir in den Gl. 18 und 19: $\alpha = \gamma = 90$. Wir erhalten

20)

$$\cos PX = \frac{h\,b\,c\,\sin\beta}{\sqrt{N}},$$

$$\cos PY = \frac{k\,a\,c\,\sin\beta}{\sqrt{N}},$$

$$\cos PZ = \frac{l\,a\,b\,\sin\beta}{\sqrt{N}}.$$

$$N = b^2c^2h^2 + a^2c^2k^2\sin^2\beta + a^2b^2l^2 - 2\,ab^2chl\cos\beta.$$

$$\text{21)}\left\{\begin{array}{l} \cos PP' = \dfrac{H}{\sqrt{N}\sqrt{N_1}} \\ \text{Hier ist} \\ H = \dfrac{hh'}{a^2} + \dfrac{kk' \sin^2\beta}{b^2} + \dfrac{ll'}{c^2} - \dfrac{hl' + h'l}{ac}\cos\beta, \\ N = \dfrac{h^2}{a^2} + \dfrac{k^2}{b^2}\sin^2\beta + \dfrac{l^2}{c^2} - \dfrac{2hl\cos\beta}{ac} \\ N_1 = \dfrac{h'^2}{a^2} + \dfrac{k'^2}{b^2}\sin^2\beta + \dfrac{l'^2}{c^2} - \dfrac{2h'l\cos\beta}{ac}, \\ \beta = XZ. \end{array}\right.$$

Berechnung der regulären Krystalle.

§. 6.

Berechnung der Hexakisoktaëder mOn (h k l).

Die Hexakisoktaëder weisen 3 von einander verschiedene Kantenwinkel (Winkel je zweier Flächen) auf, die den 3 ungleichlangen Kanten entsprechen.

Den Kantenwinkel der längsten Kante nennen wir A
„ „ „ mittleren „ „ „ B
„ „ „ kürzesten „ „ „ C

Aus je 2 Kantenwinkeln kann ein Hexakisoktaëder berechnet werden. Es sind mithin 3 Aufgaben zu lösen. Gegeben: A und B oder B und C oder A und C, gesucht die Indices h k l.

a) Gegeben A und B, gesucht die Indices der Fläche d (s. Fig. 17a).

Zunächst bestimme man allgemein die Ableitungszahlen der Flächen d, e, f in Bezug auf die Axen XYZ und beobachte

streng die Reihenfolge XYZ (nicht YXZ oder ZXY) (vergl. die Fig. 17 und 17a).

Die Ableitungszahlen (Parameter)

der Fläche d sind n, m, 1, folglich die Indices $\frac{1}{n}, \frac{1}{m}, 1,$

" " e " m, n, 1, " " " $\frac{1}{m}, \frac{1}{n}, 1,$

" " f " n, $\bar{m}$, 1, " " " $\frac{1}{n}, \frac{\bar{1}}{m}, 1.$

Die Gleichung der Fläche d ist (s. Gl. 2, S. 4), wenn $a = b = c = 1$ gesetzt wird

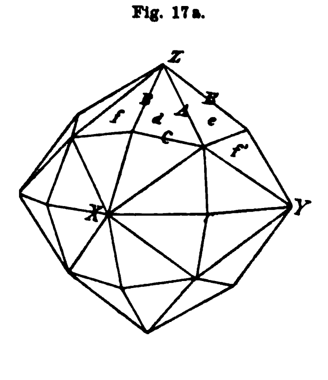
$$n \cos dx = m \cos dy = \cos dz.$$

Daraus

$$n = \frac{\cos dz}{\cos dx} \text{ und } m = \frac{\cos dz}{\cos dy}.$$

Fig. 17.

Fig. 17a.



Zunächst ist cos dx, cos dy und cos dz zu ermitteln. In Fig. 17 ist der Winkel der beiden Normalen auf d und f gleich $df = 180 - B$, folglich $dg = 90 - \frac{B}{2}$.

Ebenso ist in Fig. 17: $de = 180 - A$, mithin $dh = 90 - \frac{A}{2}$.

In Fig. 17 sei k die Projection der Rhombendodekaëderfläche, deren Indices $1 \bar{1} 0$ sind, $zh \perp zk$.

$$lk = kx = 45;\; dk = kh - dh = 90 - dh = \frac{A}{2}$$

$$\text{und } ld = lg + gd = 90 + gd = 180 - \frac{B}{2}.$$

Aus dem sphärischen Dreieck dlk folgt

$$\cos kd = \cos kl \cos ld + \sin kl \sin ld \cos kld.$$

Weil in dem sphärischen Dreieck lgx die Seite $lg = lx = 90$ ist, muss $glx = kld = gx$ sein.

Aus der letzten Gleichung folgt mithin

$$\cos gx = \frac{\cos \frac{1}{2} A}{\sin 45 \sin \frac{1}{2} B} + \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} B.$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck zgd folgt

$$\cos dz = \cos zg \sin \tfrac{1}{2} B.$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck dgx folgt

$$\cos dx = \cos gx \sin \tfrac{1}{2} B.$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$\frac{\cos dz}{\cos dx} = \frac{\cos zg \sin \frac{1}{2} B}{\cos gx \sin \frac{1}{2} B} = \frac{\sin gx}{\cos gx} = \operatorname{tg} gx.$$

Mithin

$$n = \frac{\cos dz}{\cos dx} = \operatorname{tg} gx.$$

Da $dy = 90 - dg = \frac{B}{2}$ ist, so folgt $\cos dy = \cos \frac{1}{2} B$.

Da $m = \frac{\cos dz}{\cos dy}$ ist, so folgt

$$m = \frac{\cos zg \sin \frac{1}{2} B}{\cos \frac{1}{2} B} = \sin gx \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B.$$

Um daher m und n zu finden, hat man folgende Gleichungen zu berechnen:

$$1) \begin{cases} \cos gx = \operatorname{ctg} \frac{1}{2} B + \dfrac{\cos \frac{1}{2} A}{\sin \frac{1}{2} B \,.\, \sin 45}, \\ n = \operatorname{tg} gx, \qquad m = \sin gx \operatorname{tg} \frac{1}{2} B. \end{cases}$$

Beispiel. Es sei $\frac{A}{2} = 76^0 10'$ und $\frac{B}{2} = 80^0 16'$.

$$\lg \cos \tfrac{1}{2} A = 9{,}3786$$
$$E \lg \sin \tfrac{1}{2} B = 0{,}0063$$
$$E \lg \sin 45 = 0{,}1505$$
$$\overline{9{,}5354}$$

$$\lg \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B = 0{,}7656$$
$$\lg \sin gx = 9{,}9332$$
$$\overline{\lg m = 0{,}6988}$$
$$m = 4{,}9988 = 5$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2} A}{\sin \frac{1}{2} B \sin 45} = 0{,}3431$$
$$\operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} B = 0{,}1715$$
$$\overline{\cos gx = 0{,}5146}$$
$$gx = 59^0 2'$$
$$n = \operatorname{tg} gx = 1{,}663 \ldots = \tfrac{5}{3}$$

Die Indices der Fläche d sind mithin $\frac{3}{5}\ \frac{1}{5}\ 1$ oder 3 1 5. Die Formel des Hexakisoktaëders ist $5O\frac{5}{3}$.

b) Gegeben B und C, gesucht die Indices der Fläche e.

In der Fig. 18 seien d, e und f' die Projectionen dreier Hexakisoktaëderflächen (vergl. auch Fig. 17a).

Die Indices der 2 Flächen d und e sind wie vorher $\frac{1}{n}\ \frac{1}{m}\ 1$ und $\frac{1}{m}\ \frac{1}{n}\ 1$.

Fig. 18.

Die Ableitungszahlen der Fläche f' sind m 1 n, mithin die Indices $\frac{1}{m}\ 1\ \frac{1}{n}$.

Die Gleichung der Fläche e ist

$$m \cos ex = n \cos ey = \cos ez$$

Daraus folgt

$$m = \frac{\cos ez}{\cos ex} \text{ und } n = \frac{\cos ez}{\cos ey}$$

Es seien k, r, t und p die Projectionen von 4 Rhombendodekaëderflächen. Vermöge der Zonengleichung kann man beweisen, dass die Flächen k, e und f' in einer Zone liegen (s. S. 10).

Der Punkt k ist von jedem Punkt des Zonenkreises xto um 90^0 entfernt.

Es ist (vergl. auch Fig. 17a) $es = 90 - \frac{B}{2}$; $ef' = 180 - C$; mithin $eh = 90 - \frac{C}{2}$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ehx, in welchem $ex = 90 - es = \frac{B}{2}$ ist, folgt

$$\cos \tfrac{1}{2} C = \sin \tfrac{1}{2} B \sin st$$

$$\sin st = \frac{\cos \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2} B}$$

Da $sz = 45 - st$ ist, so folgt aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ezs

$$\cos ez = \sin \tfrac{1}{2} B \cos sz = \sin \tfrac{1}{2} B \cos (45 - st)$$

$$\cos ezs = \text{ctg}\, ez\, \text{tg}\, sz$$

Aus dem sphärischen Dreieck ezy folgt

$$\cos ey = \sin ez \cos ezs = \sin ez\, \text{ctg}\, ez\, \text{tg}\, sz = \cos ez\, \text{tg}\, sz$$

oder

$$\cos ey = \sin \tfrac{1}{2} B \sin sz = \sin \tfrac{1}{2} B \sin (45 - st)$$

Um daher m und n zu finden, hat man der Reihe nach die folgenden Gleichungen zu berechnen:

$$2) \left\{ \begin{array}{ll} \sin st = \dfrac{\cos \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2} B} & m = \text{tg}\, \tfrac{1}{2} B \cos (45 - st) \\ n = \text{ctg}\, sz = \text{ctg}\, (45 - st) & \end{array} \right.$$

Beispiel. Gegeben: $\frac{B}{2} = 83^0 5' 9''$ $\frac{C}{2} = 59^0 17' 10''$

$$\lg \cos \tfrac{1}{2} C = 9{,}7082$$
$$E \lg \sin \tfrac{1}{2} B = 0{,}0032$$
$$\lg \sin st = 9{,}7114$$
$$st = 30^0 57' 55''$$
$$sz = 45 - st = 14^0 2' 5''$$
$$\lg n = \lg \text{ctg}\, (45 - st) = 0{,}60215$$
$$n = 4$$
$$\lg \text{tg}\, \tfrac{1}{2} B = 0{,}9161$$
$$\lg \cos (45 - st) = 9{,}9868$$
$$\lg m = 0{,}9029$$
$$m = 8$$

Die Indices der Fläche e sind mithin $\frac{1}{8}\ \frac{1}{4}\ 1$ oder 1 2 8.

Die Formel des Hexakisoktaëders ist $_8O_4$.

c) Gegeben A und C, gesucht die Indices der Fläche e.

In der Fig. 18 sind, wie schon erwähnt, t, k, r und p die Projectionen von 4 Rhombendodekaëderflächen.

$$de = 180 - A, \text{ mithin } le = 90 - \frac{A}{2}$$

$$ef' = 180 - C, \text{ mithin } eh = 90 - \frac{C}{2} \text{ und}$$

$$er = 90 + el = 180 - \frac{A}{2}$$

$$ek = 90 - eh = \frac{C}{2}$$

Die Indices der Fläche e sind $\frac{1}{m}\ \frac{1}{n}\ 1$. Die Gleichung der Fläche e ist mithin

$$m \cos ex = n \cos ey = \cos ez$$

Daraus

$$m = \frac{\cos ez}{\cos ex} \text{ und } n = \frac{\cos ez}{\cos ey}$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck $kr\bar{y}$ folgt

$$\cos rk = \cos^2 45 = \tfrac{1}{2}, \text{ mithin } \sin rk = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Aus dem sphärischen Dreieck rek folgt

$$\cos ek = \cos kr \cos re + \sin kr \sin re \cos kre$$

Daraus

$$\cos kre = \frac{2 \cos \frac{1}{2} C + \cos \frac{1}{2} A}{\sqrt{3} \sin \frac{1}{2} A}$$

Aus dem sphärischen Dreieck krz, in welchem rz = 90 ist, folgt

$$\cos kz = \sin kr \cos krz$$

Daraus

$$\cos krz = \frac{\cos kz}{\sin kr} = \frac{2 \cos 45}{\sqrt{3}}$$

$$krz = 35^0\, 15'\, 52''$$

Nun ist $lz = zrl = kre - 35^0\, 15'\, 52''$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ezl folgt

$$\cos ez = \cos el \cos zl = \cos lz \sin \tfrac{1}{2} A \text{ und}$$

$$\operatorname{ctg} lze = \sin lz \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A$$

Aus den sphärischen Dreiecken exz und ezy folgt

$$\cos ex = \sin ez \cos (45 + lze)$$

$$\cos ey = \sin ez \cos (45 - lze) = \sin ez \sin (45 + lze)$$

Setzt man die gefundenen Werthe in die erste Gleichung ein, so hat man, um m und n zu finden, der Reihe nach folgende Gleichungen zu lösen:

$$3) \left\{ \begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\cos kre = \dfrac{2 \cos \frac{1}{2} C + \cos \frac{1}{2} A}{\sqrt{3} \sin \frac{1}{2} A}} \\ \multicolumn{2}{c}{lz = kre - 35^0 15' 52''} \\ \cos ez = \cos lz \sin \frac{1}{2} A & \operatorname{ctg} lze = \sin lz \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \\ m = \dfrac{\operatorname{ctg} ez}{\cos (45 + lze)} & n = \dfrac{\operatorname{ctg} ez}{\sin (45 + lze)} \end{array} \right.$$

Beispiel. Es sei $\dfrac{A}{2} = \dfrac{C}{2} = 82^0 27'$

$$\begin{array}{rl} \cos \frac{A}{2} = & 0{,}13139 \\ 2 \cos \frac{1}{2} C = & \underline{0{,}26278} \\ \cos \frac{A}{2} + 2 \cos \frac{1}{2} C = & 0{,}39417 \\ \lg 0{,}39417 = & 9{,}59568 \\ E \tfrac{1}{2} \lg 3 = & 9{,}76144 \\ E \lg \sin \tfrac{1}{2} A = & \underline{0{,}00378} \\ \lg \cos kre = & 9{,}36090 \\ kre = & 76^0 43' 42'' \\ lz = & 41^0 27' 50'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \lg \cos lz = & 9{,}87470 \\ \lg \sin \frac{A}{2} = & \underline{9{,}99622} \\ \lg \cos ez = & 9{,}87092 \\ ez = & 42^0 1' 20'' \\ \lg \sin lz = & 9{,}82095 \\ \lg \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = & \underline{0{,}87765} \\ \lg \operatorname{ctg} lze = & 0{,}69860 \\ lze = & 11^0 19' 10'' \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} m = & 2 \\ \lg m = & \underline{0{,}30127} \\ E \lg \cos (45 + lze) = & 0{,}25605 \\ \lg \operatorname{ctg} ez = & 0{,}04522 \\ E \lg \sin (45 + lze) = & \underline{0{,}07979} \\ = & 0{,}12501 \\ n = & 1{,}333 \ldots = \tfrac{4}{3} \end{array}$$

Die Indices der Fläche e sind mithin $\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\ 1$ oder 2 3 4. Die Formel des Hexakisoktaëders ist $2O\frac{4}{3}$.

Berechnung der Ikositetraëder.

Ein Ikositetraëder kann sowohl aus dem Winkel B (s. Fig. 19a), als aus dem Winkel C berechnet werden. In Fig. 19 seien f, d und g die stereographischen Projectionen

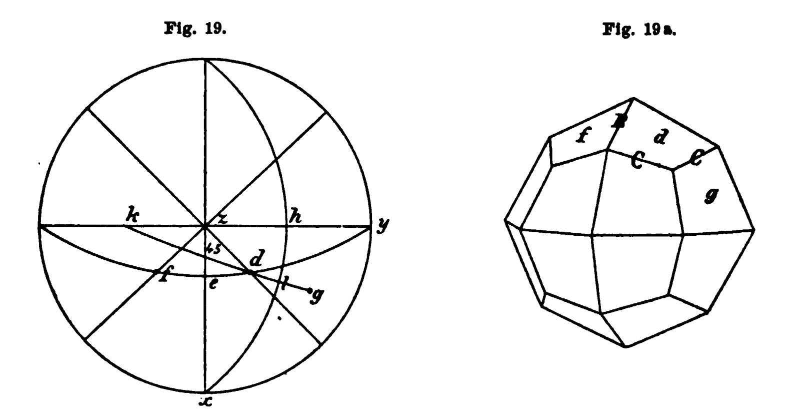


Fig. 19. Fig. 19a.

dreier Flächen des Ikositetraëders (Fig. 19a). k und h (Fig. 19) seien die Projectionen von 2 Rhombendodekaëderflächen. Ferner sei $ed = ef = \frac{180 - B}{2}$ und $dl = lg = \frac{180 - C}{2}$

Die Ableitungszahlen (Parameter) der Fläche

d (Fig. 19a) sind m, m, 1, mithin die Indices $\frac{1}{m}\ \frac{1}{m}\ 1$ oder 1 1 m,

g " " m, 1, m, " " " $\frac{1}{m}\ 1\ \frac{1}{m}$ " 1 m 1,

f " " m, —m, 1, " " " $\frac{1}{m}\ \frac{\bar{1}}{m}\ 1$ " $1\ \bar{1}\ m$.

a) Gegeben B, gesucht die Indices der Fläche d.

Die Gleichung der Fläche d ist

$$\cos dx = \cos dy = \frac{1}{m} \cos dz$$

Daraus

$$m = \frac{\cos dz}{\cos dx}$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ezd folgt

$$\sin ze = \operatorname{ctg} 45 \operatorname{ctg} \frac{B}{2} = \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} B$$

Da $\sin ze = \cos ex$, so ist auch

$$\cos ex = \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} B$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck dex folgt

$$\cos dx = \cos ex \sin \tfrac{1}{2} B$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck dze folgt

$$\cos dz = \cos ez \sin \tfrac{1}{2} B = \sin ex \sin \tfrac{1}{2} B$$

Mithin hat man, um m zu finden, folgende Gleichungen zu berechnen:

1) $\cos ex = \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} B \qquad m = \operatorname{tg} ex$

Beispiel. Es sei $\frac{B}{2} = 72^0\, 27'$

$\operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} B = 0{,}3153 \quad ex = 71^0\, 33' \quad m = 2{,}999 \ldots = 3$

Die Ikositetraëderfläche d hat die Indices 1 1 3. Die Formel des Ikositetraëders ist $_3O_3$.

b) Gegeben C, gesucht die Indices der Fläche d.

Vermöge der Zonengleichung findet man, dass die 4 Flächen k, d, l und g tautozonal sind.

Aus dem sphärischen Dreieck kzd folgt

$$\cos kd = \cos kz \cos zd + \sin kz \sin zd \cos (90 + 45)$$

Da k von jedem Punkte des Zonenkreises xlh um 90^0 absteht, so ist $kd = 90 - dl = \frac{C}{2}$; da ferner $kz = 45^0$ ist, so folgt

$$\cos \tfrac{1}{2} C = \cos 45 \cos zd - \sin 45 \sin zd \cos 45$$

$$\cos \tfrac{1}{2} C = \cos 45\, [\cos zd - \cos 45 \sin zd], \text{ weil } \sin 45 = \cos 45$$

Setzt man $\operatorname{tg} \varphi = \cos 45$, woraus $\varphi = 35^0\, 15'\, 52''$ folgt, so folgt $\cos \frac{C}{2} = \cos 45 \left(\cos zd - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sin zd\right)$, woraus

$$\cos(zd + \varphi) = \frac{\cos\frac{C}{2}\cos\varphi}{\cos 45}$$

Aus dem sphärischen Dreieck zdx folgt

$$\cos dx = \sin zd \cos 45$$

Da die Indices von d: 1 1 m sind, so ist die Gleichung von d:

$$\cos dx = \cos dy = \frac{1}{m}\cos dz$$

mithin

$$m = \frac{\cos dz}{\cos dx} = \frac{\cos dz}{\sin zd \cos 45} = \frac{\operatorname{ctg} dz}{\cos 45}$$

Um m zu finden, hat man mithin zu berechnen:

$$2)\left\{\begin{array}{l}
\cos(zd + \varphi) = \dfrac{\cos\frac{C}{2}\cos\varphi}{\cos 45}, \text{ worin } \varphi = 35^0\,15'\,52'' \text{ ist,} \\
m = \dfrac{\operatorname{ctg} zd}{\cos 45}, \text{ woraus auch folgt} \\
\lg\cos(zd + \varphi) = \lg\cos\frac{C}{2} + 0{,}06247 \\
\lg m = \lg\operatorname{ctg} zd + 0{,}150515
\end{array}\right.$$

Beispiel. $\frac{C}{2} = 73^0\,13'$

$$\lg\cos\frac{C}{2} = 9{,}46053$$

$$\lg\frac{\cos\varphi}{\cos 45} = 0{,}06247$$

$$\lg\cos(zd + \varphi) = 9{,}52300$$

$$zd + \varphi = 70^0\,31'\,25''$$

$$\varphi = 35^0\,15'\,52''$$

$$zd = 35^0\,15'\,33''$$

$$\lg\operatorname{ctg} zd = 0{,}15067$$

$$E\lg\cos 45 = 0{,}15051$$

$$\lg m = 0{,}30118$$

$$m = 2$$

Die Indices der Fläche d sind 1 1 2. Die Formel des Ikositetraëders ist $_2O_2$.

Berechnung der Triakisoktaëder.

In der Fig. 20 repräsentirt d die Projection der Triakisoktaëderfläche $1 \frac{1}{m} 1$ oder m 1 m, e die der Triakisoktaëderfläche $\frac{1}{m} 1\ 1$ oder 1 m m. k und h sind die Projectionen zweier Rhombendodekaëderflächen. Es ist $pd = 180 - B$ und $de = 180 - A$, $dk = 90 - \frac{B}{2}$ und $df = 90 - \frac{A}{2}$

Die Gleichung der Fläche d ist

$$\frac{\cos dx}{m} = \frac{\cos dy}{1} = \frac{\cos dz}{m}$$

woraus folgt

$$m = \frac{\cos dx}{\cos dy} = \frac{\cos dz}{\cos dy}$$

Fig. 20.

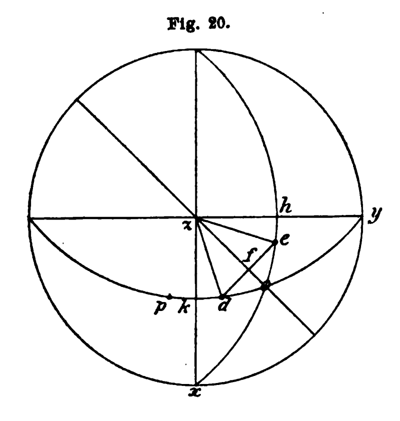
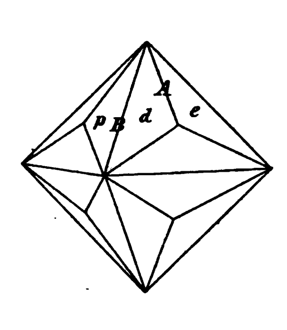


Fig. 20 a.



a) Gegeben B, gesucht die Indices der Fläche d.
Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck kdz folgt

$$\cos dz = \sin \frac{B}{2} \cos 45$$

Aus demselben rechtwinkligen sphärischen Dreieck kdz folgt

$$\cos kzd = \text{tg}\ 45\ \text{ctg}\ zd = \text{ctg}\ zd \text{ und}$$

$$\sin 45 = \operatorname{ctg} kzd \operatorname{ctg} \frac{B}{2}$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$\sin 45 = \frac{\operatorname{ctg} zd}{\sin kzd} \cdot \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \text{ oder } \sin kzd = \frac{\operatorname{ctg} zd \,.\, \operatorname{ctg} \frac{B}{2}}{\cos 45}$$

Aus dem sphärischen Dreieck dzy folgt

$$\cos dy = \sin zd \cos dzy = \sin zd \sin kzd$$

Setzt man die Werthe für cos dy und cos dz in die erste Gleichung, so ergibt sich

$$m = \frac{\sin \frac{B}{2} \cos 45}{\sin zd \sin kzd} = \frac{\sin \frac{B}{2} \cos 45 \,.\, \cos 45}{\sin zd \,.\, \operatorname{ctg} zd \operatorname{ctg} \frac{B}{2}}$$

Daraus

1) $m = \cos 45 \operatorname{tg} \frac{B}{2}$, woraus $\lg m = \lg \operatorname{tg} \frac{B}{2} + 9{,}84949$

b) Gegeben A, gesucht die Indices von d (s. Fig. 20).

Es ist o der Durchschnittspunkt der 2 Zonen kdy und hex, und man findet vermöge der Gl. 5 die Indices der Fläche o: 1 1 1; es ist mithin o eine Oktaëderfläche. Die Gleichung von o ist $\cos ox = \cos oy = \cos oz$

Aus dem sphärischen Dreieck oxz folgt

$$\cos ox = \sin oz \cos xzo = \sin ox \cos 45$$

und daraus

$$\operatorname{ctg} ox = \operatorname{ctg} oy = \operatorname{ctg} oz = \cos 45$$

woraus folgt

$$ox = oy = oz = 54^0\, 44'\, 8'$$

Diesen Winkel nennen wir δ.

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck kox folgt

$$\cos kox = \sin kxo \cos kx = \sin 45 \cos 45 = \tfrac{1}{2}$$

woraus $kox = 60^0$ folgt.

Eine Betrachtung der Figur lehrt, dass auch $dof = 60^0$ ist.

Nun können wir zur Berechnung von dy und dz schreiten.

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck dfo folgt

$$\cos \frac{A}{2} = \sin do \,.\, \sin 60$$

woraus

$$\sin do = \frac{\cos \frac{1}{2} A}{\sin 60}$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck koz folgt

$$\cos oz = \cos ko \cos kz = \cos ko \cos 45$$

Hieraus

$$\cos ko = \frac{\cos oz}{\cos 45} = \frac{\cos \delta}{\cos 45}$$

Daraus folgt

$$ko = 35^0 15' 52''$$

Vergleicht man diesen Winkel mit δ, so findet man

$$ko = 90 - \delta$$

Nun ist $kd = ko - do = 90 - \delta - do$

Ferner $dy = oy + od = \delta + od$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck kdz folgt

$\cos zd = \cos kz \cos kd$ oder

$\cos zd = \cos 45 \cos (90 - \delta - do) = \cos 45 \sin (\delta + do)$

Da $m = \frac{\cos dz}{\cos dy} = \frac{\cos 45 \sin (\delta + do)}{\cos (\delta + od)} = \cos 45 \operatorname{tg} (\delta + do)$ ist, so hat man, um m zu finden, folgende Gleichungen zu berechnen:

$$2) \left\{ \begin{aligned} \sin do &= \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin 60} \\ m &= \cos 45 \operatorname{tg} (\delta + do) \\ \delta &= 54^0 44' 8'' \text{ oder} \\ \lg \sin do &= \lg \cos \frac{A}{2} + 0{,}06247 \\ \lg m &= \lg \operatorname{tg} (\delta + do) + 9{,}84949 \end{aligned} \right.$$

Beispiel. $\frac{A}{2} = 76^0 22''$

$$\begin{aligned} \lg \cos \frac{A}{2} &= 9{,}37237 \\ E \lg \sin 60 &= 0{,}06247 \\ \hline \lg \sin do &= 9{,}43484 \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{r}
do = 15^\circ 47' 38'' \\
\delta = 54^\circ 44' \; 8'' \\
\hline
\delta + do = 70^\circ 31' 46''
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
\lg \operatorname{tg} (\delta + do) = 0{,}4516 \\
\lg \cos 45 = 9{,}8495 \\
\hline
\lg m = 0{,}3011 \\
m = 2
\end{array}
$$

Die Indices der Fläche d sind daher $\frac{1}{2} \frac{1}{2}$ 1 oder 1 1 2. Die Formel des Triakisoktaëders ist $_2O_2$.

Berechnung der Tetrakishexaëder.

In der Fig. 21 sei e die Projection der Tetrakishexaëderfläche $1\ 0\ \frac{1}{n}$ oder n 0 1 und es sei d die Projection der Tetrakishexaëderfläche $\frac{1}{n}\ 0\ 1$ oder 1 0 n; die Gleichung der Fläche d ist alsdann

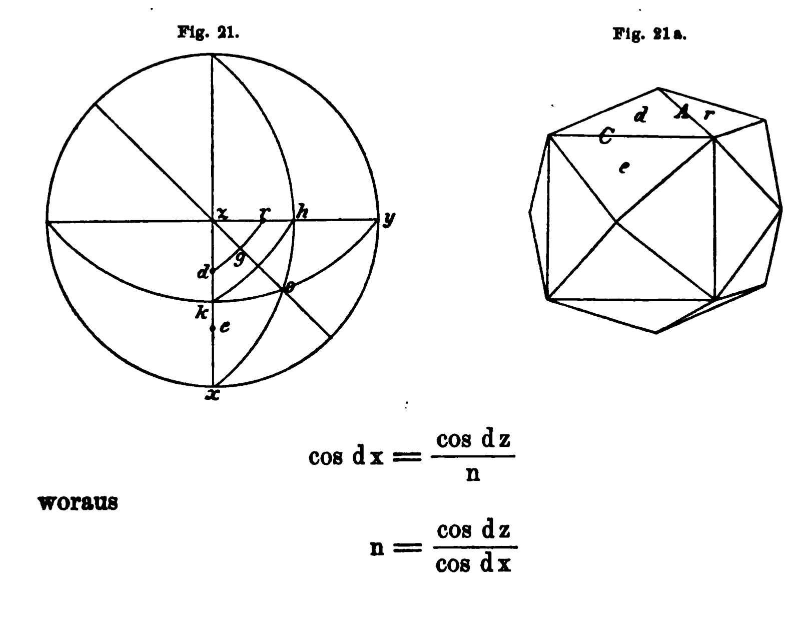


Fig. 21. Fig. 21 a.

$$\cos dx = \frac{\cos dz}{n}$$

woraus

$$n = \frac{\cos dz}{\cos dx}$$

a) Gegeben C, gesucht n.

Es seien k und h die Projectionen zweier Rhombendodekaëderflächen. Da $de = 180 - C$, so ist $dk = 90 - \frac{C}{2}$ und $dz = 45 - dk = \frac{C}{2} - 45$; auch ist $dx = 45 + dk = 90 + 45 - \frac{C}{2}$. Mithin ist

$$1)\ n = \frac{\cos\left(\frac{C}{2} - 45\right)}{-\sin\left(45 - \frac{C}{2}\right)} = \operatorname{ctg}\left(\frac{C}{2} - 45\right)$$

b) Gegeben A, gesucht n.

In der Fig. 21 stelle r die Projection der Tetrakishexaëderfläche $0\,\frac{1}{n}\,1$ oder $0\,1\,n$ vor. Der Durchschnitt der beiden Zonen ky und hx liefert die Projection der Oktaëderfläche o. Legt man durch o und z einen grössten Kreis, so steht dieser senkrecht auf dr. Da nun $dr = 180 - A$ ist, so ist $dg = 90 - \frac{A}{2}$. Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck dgz folgt

$$\sin dg = \sin dz \sin 45$$

woraus

$$\sin dz = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin 45}$$

und da $dx = 90 - dz$, folglich $\cos dx = \sin dz$ ist, so folgt

$$n = \frac{\cos dz}{\cos dx} = \operatorname{ctg} dz$$

Um daher n zu finden, berechne man

$$2)\ \begin{cases} \sin dz = \dfrac{\cos\frac{A}{2}}{\sin 45}, \text{ woraus } \lg \sin dz = \lg \cos\dfrac{A}{2} + 0{,}15051 \\ n = \operatorname{ctg} dz \qquad\qquad \lg n = \lg \operatorname{ctg} dz \end{cases}$$

Berechnung des Rhombendodekaëders.

In der Fig. 21 repräsentire k die Projection der Rhombendodekaëderfläche 1 0 1 und h die der Rhombendodekaëderfläche 0 1 1. Die Gleichung der Fläche k ist

$$\cos kx = \cos kz$$

mithin

$$kx = kz = 45^0$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck kzh folgt

$$\cos kh = \cos^2 45 = \frac{1}{2}$$

mithin

$$kh = 60$$

Der Winkel zweier Rhombendodekaëderflächen ist mithin $180 - 60 = 120^0$. Dies lehrt auch schon der blosse Anblick des Körpers.

Berechnung des Oktaëders.

In der Fig. 21 repräsentire 0 die Projection der Oktaëderfläche 1 1 1. Die Gleichung dieser Fläche ist

$$\cos ox = \cos oy = \cos oz$$

Aus dem sphärischen Dreieck xoz folgt

$$\cos ox = \sin oz \cos xzo = \sin ox \cos 45$$

Daraus folgt

$$\operatorname{ctg} ox = \cos 45$$
$$ox = 54^0 44' 8'' = oy = oz$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck okz folgt nun

$$\cos oz = \cos ok \cos kz = \cos ok \cos 45$$

mithin

$$\cos ok = \frac{\cos oz}{\cos 45}$$

woraus

$$ok = 35^0 15' 52''$$

Der Winkel zweier Oktaëderflächen ist mithin

$$180 - 2 . ok = 109^0 28' 16''$$

Berechnung der hemiëdrischen Formen.

§. 7.

Berechnung der Hexakistetraëder.

a) Gegeben A′ und B′, gesucht die Indices von d.

In der Fig. 22 sei d die Projection der Hexakistetraëderfläche $\frac{1}{n}\ \frac{1}{m}\ 1$ (s. Fig. 22a). Die Gleichung von d ist

$$n \cos dx = m \cos dy = \cos dz$$

Fig. 22.

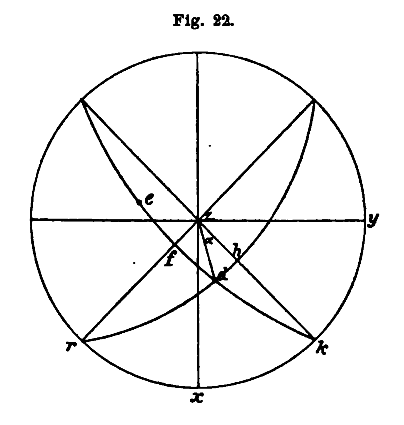
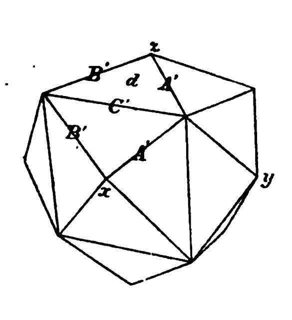


Fig. 22a.



k und r seien die Projectionen zweier Rhombendodekaëderflächen. Es sei $dh = \frac{1}{2}(180 - A') = 90 - \frac{1}{2}A'$ und

$$df = \frac{180 - B'}{2} = 90 - \frac{B'}{2}$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck dhz folgt

$$\sin dh = \sin \alpha \sin dz$$

oder

$$\text{a)}\ \cos \frac{A'}{2} = \sin \alpha \sin dz$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck dfz folgt

$$\sin df = \sin dz \sin fzd$$

oder

$$\text{b)}\ \cos\frac{B'}{2} = \sin dz \cos\alpha$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$\text{c)}\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\frac{1}{2}A'}{\cos\frac{1}{2}B'}$$

Aus dem Dreieck dxz folgt

$$\text{d)}\ \cos dx = \sin dz \cos(45 - \alpha)$$

Aus dem Dreieck dyz folgt

$$\text{e)}\ \cos dy = \sin dz \cos(45 + \alpha)$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung für d, so erhält man m und n. Man hat daher folgende Gleichungen zu berechnen:

$$1)\ \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\cos\frac{A'}{2}}{\cos\frac{B'}{2}} & \sin dz = \dfrac{\cos\frac{A'}{2}}{\sin\alpha} \\[2ex] m = \dfrac{\operatorname{ctg} dz}{\cos(45+\alpha)} & n = \dfrac{\operatorname{ctg} dz}{\sin(45+\alpha)} \end{cases}$$

Z. B. Gegeben $\frac{A'}{2} = 79^0\,6'\,24''$ $\frac{B'}{2} = 55^0\,27'\,44''$

$$\lg\cos\frac{A'}{2} = 9{,}27642 \qquad \lg\cos\frac{A'}{2} = 9{,}27642$$

$$E\lg\cos\frac{B'}{2} = 0{,}24645 \qquad E\lg\sin\alpha = 0{,}50004$$

$$\lg\operatorname{tg}\alpha = 9{,}52287 \qquad \lg\sin dz = 9{,}77646$$

$$\alpha = 18^\circ\,26' \qquad dz = 36^0\,42'\,10''$$

$$m = 3{,}01 = 3$$
$$\lg m = 0{,}47907$$
$$E\lg\cos(45+\alpha) = 0{,}35149$$
$$\lg\operatorname{ctg} dz = 0{,}12758$$
$$E\lg\sin(45+\alpha) = 0{,}04846$$
$$\lg n = 0{,}17604$$
$$n = 1{,}4999 = 1{,}5$$

b) Gegeben A′ und C′, gesucht die Indices der Fläche e (s. Fig. 18).

Diese Aufgabe fällt mit der früher gelösten Aufgabe: „Die Winkel A und C des Hexakisoktaëders sind gegeben, gesucht werden die Indices der Fläche e" zusammen (S. 35). Wir stellen daher nur die zur Lösung nöthigen Gleichungen untereinander.

$$2)\left\{\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\cos kre = \dfrac{2\cos\frac{1}{2}C + \cos\frac{1}{2}A}{\sqrt{3}\sin\frac{1}{2}A}} \\ \multicolumn{2}{c}{lz = kre - 35^0\,15'\,52''} \\ \cos ez = \cos lz \sin\dfrac{A}{2} & \operatorname{ctg} lze = \sin lz \operatorname{tg}\frac{1}{2}A \\ m = \dfrac{\operatorname{ctg} ez}{\cos(45 + lze)} & n = \dfrac{\operatorname{ctg} ez}{\sin(45 + lze)} \end{array}\right.$$

c) Gegeben B′ und C′, gesucht die Indices der Fläche d.

Fig. 23.

In der Fig. 23 seien k, r, s und g die Proportionen von Rhombendodekaëderflächen. d sei die Projection der Hexakistetraëderfläche $\frac{1}{n}\,\frac{1}{m}\,1$. Die Gleichung der Fläche d ist

$$n\cos dx = m\cos dy = \cos dz,$$

woraus

$$n = \frac{\cos dz}{\cos dx} \text{ und } m = \frac{\cos dz}{\cos dy}$$

Es sei $dh = \frac{1}{2}(180 - C')$ und $df = \frac{1}{2}(180 - B') = 90 - \frac{B'}{2}$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck $gs\bar{x}$ folgt

$$\cos gs = \cos^2 45 = \tfrac{1}{2}, \text{ mithin } gs = 60 \text{ und}$$

$$\cos gs = \operatorname{ctg}^2 sg\bar{x}, \text{ woraus}$$

$$sg\bar{x} = 54^0\,44'\,8''$$

Aus dem sphärischen Dreieck dsg folgt

$$\cos ds = \cos gs \cos dg + \sin gs \sin dg \cos dgs$$

Da $ds = sh - dh = 90 - \left(90 - \frac{C'}{2}\right) = \frac{C'}{2}$ und

$dg = gf + fd = 90 + 90 - \frac{B'}{2}$, so folgt

$$\cos\frac{C'}{2} = -\cos 60 \cos\frac{B'}{2} + \sin 60 \sin\frac{B'}{2} \cos dgs$$

woraus

$$\cos dgs = \frac{\cos\frac{C'}{2} + \cos 60 \cos\frac{B'}{2}}{\sin 60 \sin\frac{B'}{2}} = \frac{2\cos\frac{C'}{2} + \cos\frac{B'}{2}}{\mathrm{tg}\, 60 \sin\frac{B'}{2}}$$

Es ist

$$\sphericalangle dgr = 180 - sg\bar{x} - dgs = 125^{0}\,15'\,52'' - dgs = rf$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck drf folgt nun

$$\cos rd = \cos rf \sin\frac{B'}{2}$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck dzf folgt

$$\cos zd = \cos fz \cos fd = \sin rf \sin\frac{B'}{2}$$

Aus dem sphärischen Dreieck dkr folgt

$$\cos dk = \sin rd \cos drk$$

woraus

$$\cos drk = \cos drx = \frac{\cos\frac{B'}{2}}{\sin rd}$$

Aus dem Dreieck drx folgt

$$\cos dx = \cos rd \cos 45 + \sin rd \sin 45 \cos drx$$

oder da $\cos 45 = \sin 45$

$$\cos dx = \cos 45 \,(\cos rd + \sin rd \cos drx)$$

$$\cos dx = \cos 45 \left(\cos rd + \cos\frac{B'}{2}\right)$$

$$\cos dx = \cos 45 \left(\cos rf \,.\, \sin\frac{B'}{2} + \cos\frac{B'}{2}\right)$$

Mithin ist

$$n = \frac{\cos dz}{\cos dx} = \frac{\sin rf \sin \frac{B'}{2}}{\cos 45 \left(\cos rf \sin \frac{B'}{2} + \cos \frac{B'}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin rf}{\cos 45 \left(\cos rf + \operatorname{ctg} \frac{B'}{2}\right)}$$

Aus dem sphärischen Dreieck dyk folgt

$$\cos dy = \cos 45 \cos dk + \sin 45 \sin dk \cos dky \text{ oder}$$

$$\cos dy = \cos 45 \left(\cos \frac{B'}{2} + \sin \frac{B'}{2} \cos (90 + fkz)\right)$$

$$\cos dy = \cos 45 \left(\cos \frac{B'}{2} - \sin \frac{B'}{2} \sin fkz\right)$$

$$\cos dy = \cos 45 \left(\cos \frac{B'}{2} - \sin \frac{B'}{2} \cos rf\right)$$

Mithin ist

$$m = \frac{\cos dz}{\cos dy} = \frac{\sin rf \sin \frac{1}{2} B'}{\cos 45 (\cos \frac{1}{2} B' - \sin \frac{1}{2} B' \cos rf)}$$

$$= \frac{\sin rf}{\cos 45 (\operatorname{ctg} \frac{1}{2} B' - \cos rf)}$$

Um m und n zu finden, hat man mithin folgende Gleichungen der Reihe nach zu berechnen:

1)

$$\cos dgs = \frac{2 \cos \frac{C'}{2} + \cos \frac{B'}{2}}{\operatorname{tg} 60 \sin \frac{B'}{2}}$$

$$\sphericalangle\, dgr = rf = 125^{\circ}\, 15'\, 52'' - dgs$$

$$n = \frac{\sin rf}{\cos 45 (\operatorname{ctg} \frac{1}{2} B' + \cos rf)}$$

$$m = \frac{\sin rf}{\cos 45 (\operatorname{ctg} \frac{1}{2} B' - \cos rf)}$$

oder logarithmisch

$$\operatorname{tg} \varphi = \cos dgr = \cos rf$$

$$n = \frac{\sin rf \cos \varphi \sin \frac{1}{2} B'}{\cos 45 \cos \left(\varphi - \frac{B'}{2}\right)} \qquad m = \frac{\sin rf \cos \varphi \sin \frac{1}{2} B'}{\cos 45 \cos \left(\varphi + \frac{B'}{2}\right)}$$

Z. B. $\frac{B'}{2} = 61^0\,26'$ $\frac{C'}{2} = 76^0\,10'$

$$\cos\frac{B'}{2} = 0{,}47820$$

$$2\cos\frac{C'}{2} = 0{,}47820$$

$$\cos\frac{B'}{2} + 2\cos\tfrac{1}{2}C' = 0{,}95640$$

$$\lg 0{,}95\ldots = 9{,}98064$$

$$E\lg tg\, 60 = 9{,}76144$$

$$E\lg\sin\tfrac{1}{2}B' = 0{,}05638$$

$$\lg\cos gds = 9{,}79846$$

$$gds = 51^0\,2'$$

$$dgr = 74^0\,14' = rf$$

$$\varphi = 15^0\,12'$$

$$\frac{B'}{2} = 61^0\,26$$

$$\varphi + \frac{B'}{2} = 76^0\,38'$$

$$\frac{B'}{2} - \varphi = 46^0\,14'$$

$$m = 4{,}99 = 5$$

$$\lg m = 0{,}69805$$

$$E\lg\cos\left(\varphi + \frac{B'}{2}\right) = 0{,}63605$$

$$\lg\sin rf = 9{,}98334$$

$$\lg\cos\varphi = 9{,}98453$$

$$\lg\sin\tfrac{1}{2}B' = 9{,}94362$$

$$E\lg\cos 45 = 0{,}15051$$

$$E\lg\cos\left(\varphi - \frac{B'}{2}\right) = 0{,}16007$$

$$\lg n = 0{,}22207$$

$$n = 1{,}667 = \tfrac{5}{3}$$

Die Indices der Fläche d sind: $\frac{3}{5}\ \frac{1}{5}\ 1$ oder 3 1 5. Die Formel des Hexakistetraëders ist $\frac{5\,O\frac{5}{3}}{2}$

Berechnung der Trigondodekaëder.

a) Gegeben B′, gesucht die Indices der Fläche d.

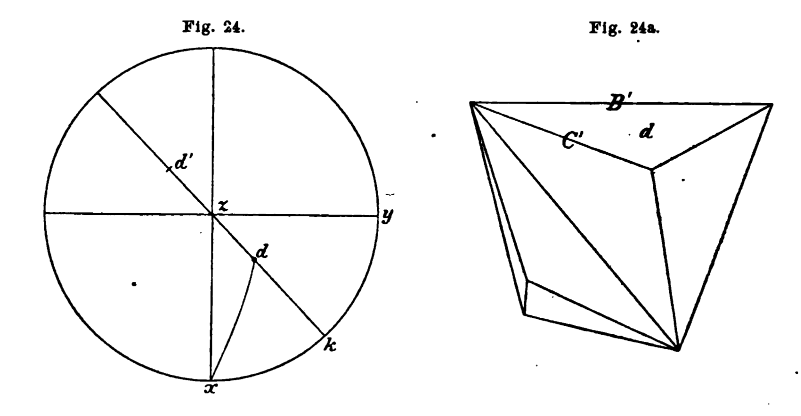
In der Fig. 24 sei d die Projection der Trigondodekaëderfläche $\frac{1}{m}\ \frac{1}{m}\ 1$ oder 1 1 m. Die Gleichung der Fläche d ist

$$m \cos dx = m \cos dy = \cos dz$$

Mithin

$$m = \frac{\cos dz}{\cos dx}$$

Fig. 24. Fig. 24a.



Ist k die Projection der Rhombendodekaëderfläche 1 1 0, so folgt aus dem sphärischen Dreieck xdz

$$\cos dx = \sin dz \cos xzd = \sin dz \cos 45$$

Nun ist $dd' = 180 - B'$, mithin $zd = 90 - \frac{B'}{2}$, folglich

$$\cos dx = \cos \tfrac{1}{2} B' \cos 45$$

folglich

1) $$m = \frac{\sin \frac{1}{2} B'}{\cos \frac{1}{2} B' \cos 45} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} B'}{\cos 45}.$$

Daraus folgt auch

$$\lg m = \lg \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B' + 0{,}15051$$

b) Gegeben C′.

Dieser Fall ist schon bei der Berechnung des Ikositetraëders erledigt. Um m zu finden, berechne man:

$$2)\left\{\begin{array}{l} \cos(zd + \varphi) = \dfrac{\cos\frac{1}{2}C' \cos\varphi}{\cos 45} \\ \quad \text{worin } \varphi = 35^0\,15'\,52'' \text{ ist,} \\ m = \dfrac{\operatorname{ctg} zd}{\cos 45}, \text{ woraus auch folgt} \\ \lg\cos(zd + \varphi) = \lg\cos\frac{1}{2}C' + 0{,}06247 \\ \lg m = \lg\operatorname{ctg} zd + 0{,}150515 \end{array}\right.$$

Berechnung der Deltoiddodekaëder.

a) Gegeben A′.

Dieser Fall ist durch die Berechnung der Triakisoktaëder schon erledigt. Die Resultate sind folgende:

$$3)\left\{\begin{array}{ll} \sin do = \dfrac{\cos\frac{1}{2}A'}{\sin 60} & \lg\sin do = \lg\cos\frac{1}{2}A' + 0{,}06247 \\ n = \cos 45 \operatorname{tg}(\delta + do) & \lg n = \lg\operatorname{tg}(\delta + do) + 9{,}84949 \\ & \delta = 54^0\,44'\,8'' \end{array}\right.$$

b) Gegeben B′, gesucht die Indices der Fläche d.

In der Fig. 25 sei d die Projection der Deltoiddodekaëderfläche $1\,\frac{1}{m}\,1$ (oder m 1 m). Die Gleichung dieser Fläche ist

$$\cos dx = m \cos dy = \cos dz$$

woraus

$$m = \frac{\cos dx}{\cos dy}$$

Sind k, r, e, $\bar{k}$ die Projectionen von vier Rhombendodekaëderflächen und d′ die Projection der Deltoiddodekaëderfläche $\frac{\bar{1}}{m}\,\bar{1}\,1$ (oder $\bar{1}\,\bar{m}\,m$), so ist leicht mit Hilfe der Gl. 4 (S. 8) zu zeigen, dass $k\,d\,d'\bar{k}$ tautozonal sind. Es ist aber $dd' = 180 - B'$, mithin $sd = 90 - \frac{B'}{2}$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck osd folgt

$$\sin sd = \sin do \sin dos$$

Fig. 25.

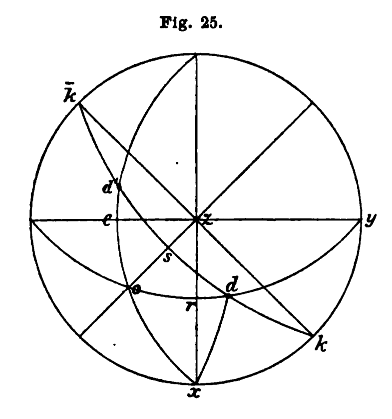
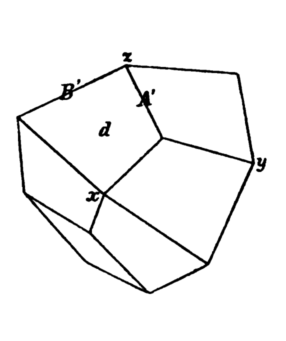


Fig. 25a.



Es ist leicht zu ermitteln, dass o die Projection der Oktaëderfläche $1\bar{1}1$ ist. Mithin ist, wie früher gelehrt wurde,

$$\sphericalangle dos = 60$$
$$or = 35^0\,15'\,52''$$
$$ox = 54^0\,44'\,8''$$

Daher folgt aus $\sin sd = \sin do \sin dos$

$$\sin do = \frac{\cos \frac{1}{2} B'}{\sin 60}$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck rdx folgt

$\cos xd = \cos rd \cos 45$, und da

$dy = ry - rd = 90 - rd$ und

$rd = od - or = od - 35^0\,15'\,52''$ ist,

so ist $m = \dfrac{\cos rd \cos 45}{\sin rd} = \operatorname{ctg} rd \cos 45$

Man hat daher, um m zu finden, folgende Gleichungen zu berechnen:

$$4) \begin{cases} \sin do = \dfrac{\cos \frac{B'}{2}}{\sin 60} \\ rd = od - 35^0\,15'\,52'' \\ m = \operatorname{ctg} rd \cos 45 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lg \sin do = \lg \cos \frac{B'}{2} + 0{,}06247 \\ rd = od - 35^0\,15'\,52'' \\ \lg m = \lg \operatorname{ctg} rd + 9{,}84949 \end{cases}$$

Berechnung des Tetraëders.

In Fig. 24 sei d die Projection der Tetraëderfläche 1 1 1 und d′ die der Tetraëderfläche $\bar{1}\,\bar{1}\,1$. Nun ist schon früher, bei der Berechnung des Oktaëders, gezeigt worden, dass $dx = dy = dz = 54^\circ 44' 8''$; es ist mithin $dd' = 2 . dz$ oder $dd' = 109^\circ 28' 16''$. Der Winkel zweier Tetraëderflächen ist $180 - dd' = 70^\circ 31' 44''$.

Pentagonale oder parallelflächige Hemiëdrie.

§. 8.

Berechnung der Dyakisdodekaëder.

a) Gegeben A″ und B″, gesucht die Indices der Fläche d.

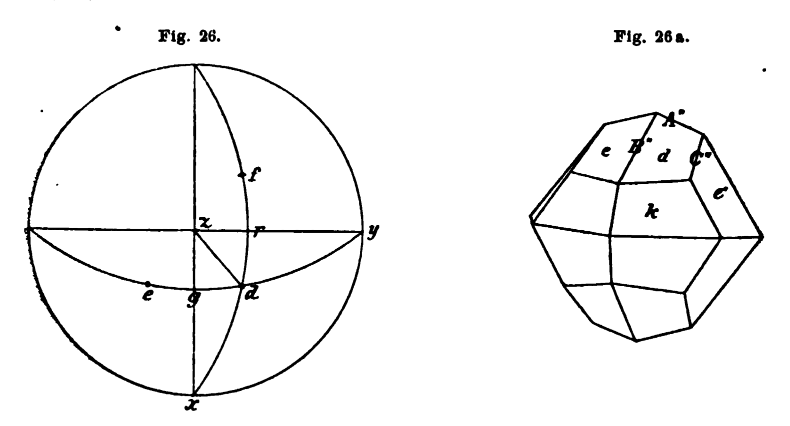


Fig. 26. Fig. 26a.

In der Fig. 26 sei d die Projection der Dyakisdodekaëderfläche $\frac{1}{n}\,\frac{1}{m}\,1$ (s. Fig. 26a). Die Gleichung der Fläche d ist

$$n \cos dx = m \cos dy = \cos dz$$

Daraus

$$n = \frac{\cos dz}{\cos dx} \text{ und } m = \frac{\cos dz}{\cos dy}$$

Es sei in Fig. 26 $de = 180 - B''$ und $df = 180 - A''$ mithin $dg = 90 - \frac{B''}{2}$ und $dr = 90 - \frac{A''}{2}$

Aus den rechtwinkligen sphärischen Dreiecken dgz und dzr folgt, wenn $gzd = \alpha$ gesetzt wird,

$$\sin gd = \sin dz \sin \alpha$$
$$\sin dr = \sin dz \cos \alpha$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin gd}{\sin dr} = \frac{\cos \frac{1}{2} B''}{\cos \frac{1}{2} A''}$$

folglich kann man dz berechnen aus

$$\sin dz = \frac{\cos \frac{1}{2} B''}{\sin \alpha}$$

Aus den sphärischen Dreiecken dxz und dzy folgt

$$\cos dx = \sin dz \cos \alpha$$

und

$$\cos dy = \sin dz \sin \alpha$$

Mithin ist

$$n = \frac{\cos dz}{\cos dx} = \frac{\cos dz}{\sin dz \cos \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} dz}{\cos \alpha}$$

und

$$m = \frac{\cos dz}{\cos dy} = \frac{\cos dz}{\sin dz \sin \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} dz}{\sin \alpha}$$

Um daher m und n zu finden, hat man die folgenden Gleichungen zu berechnen:

$$1) \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \frac{1}{2} B''}{\cos \frac{1}{2} A''} & \sin dz = \frac{\cos \frac{1}{2} B''}{\sin \alpha} \\ n = \frac{\operatorname{ctg} dz}{\cos \alpha} & m = \frac{\operatorname{ctg} dz}{\sin \alpha} \end{array} \right.$$

Es sei z. B. $\frac{A''}{2} = 64^0\, 7'$ $\quad \frac{B''}{2} = 77^0\, 24'$

$$\begin{aligned} \lg \cos \tfrac{1}{2} B'' &= 9{,}33874 \\ E \lg \cos \tfrac{1}{2} A'' &= 0{,}36000 \\ \hline \lg tg\, \alpha &= 9{,}69874 \\ \alpha &= 26^0\, 33' \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lg \cos \tfrac{1}{2} B'' &= 9{,}33874 \\ E \lg \sin \alpha &= 0{,}34972 \\ \hline \lg \sin dz &= 9{,}68846 \\ dz &= 29^0\, 13' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= 4 \\ \lg m &= 0{,}60210 \\ \hline E \lg \sin \alpha &= 0{,}34972 \\ \lg ctg\, dz &= 0{,}25238 \\ E \lg \cos \alpha &= 0{,}04840 \\ \hline \lg n &= 0{,}30078 \\ n &= 2 \end{aligned}$$

Die Indices der Fläche d sind: $\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ 1$ oder 2 1 4. Die Formel des Dyakisdodekaëders ist $\left[\frac{4O2}{2}\right]$

b) Gegeben B″ und C″, gesucht die Indices der Fläche d.

In der Fig. 27 sei d die Projection der Dyakisdodekaëderfläche $\frac{1}{n}\ \frac{1}{m}\ 1$. Die Gleichung der Fläche ist

$$n \cos dx = m \cos dy = \cos dz$$

woraus

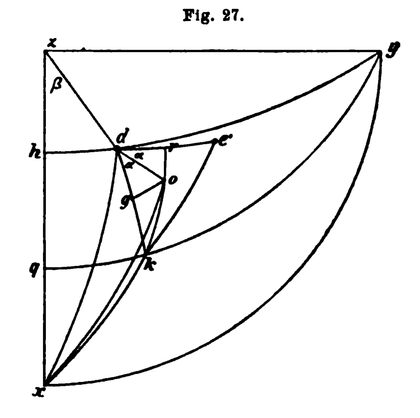
$$n = \frac{\cos dz}{\cos dx} \text{ und } m = \frac{\cos dz}{\cos dy}$$

folgt.

Es sei $dh = 90 - \frac{B''}{2}$ und

$de' = dk = ke' = 180 - C''$

Fig. 27.



Halbirt man de′ und dk und zieht in den Halbirungspunkten r und g grösste Kreise senkrecht auf de′ und dk, so schneiden diese sich in dem Punkte o und es ist leicht einzusehen, dass o die Projection der Oktaëderfläche 1 1 1 ist. Verbindet man o und d mit z, so ist aus §. 6 (S. 45)

dass $oz = 54^0\,44'\,8''$ ist. Weil $de' = dk = ke' = 180 - C''$ ist, so erhält man aus dem sphärischen Dreieck dke' den Winkel $\frac{1}{2} kde' = \alpha$ vermöge der Gleichung:

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{\cos^2 \frac{1}{2} C''}{\sin^2 C''}} = \frac{1}{2 \sin \frac{C''}{2}} = \frac{\cos 60}{\sin \frac{C''}{2}}$$

Aus dem bei r rechtwinkligen sphärischen Dreieck dor folgt

$$\cos dor = \sin \alpha \sin \frac{C''}{2} = \frac{\cos 60}{\sin \frac{C''}{2}} \sin \frac{C''}{2} = \cos 60$$

Mithin

$$dor = 60^0$$

Aus demselben Dreieck ergibt sich

$$\cos \frac{C''}{2} = \sin do \sin 60$$

woraus

$$\sin do = \frac{\cos \frac{1}{2} C''}{\sin 60}$$

Da o die Projection der Oktaëderfläche 1 1 1 ist, so folgt

$$ozx = 45^0$$

Aus dem Dreieck doz folgt nun

$$\cos do = \cos dz \cos zo + \sin dz \sin zo \cos (45 - \beta)$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck dhz folgt

$$\sin hd = \sin zd \sin \beta$$

woraus

$$\cos \frac{B''}{2} = \sin zd \sin \beta$$

Die 2 letzten Gleichungen enthalten die beiden Unbekannten dz und β und diese können in folgender Weise daraus ermittelt werden. Aus der ersten Gleichung folgt

$$\cos do = \cos dz \cos zo + \sin dz \sin zo \cos 45 (\cos \beta + \sin \beta)$$

Substituirt man in diese Gleichung den Werth für $\sin \beta$, so ergibt sich

$$\cos do = \cos dz \cos zo + \sin dz \sin zo \cos 45 \,.\left(\sqrt{1 - \frac{\cos^2 \frac{1}{2} B''}{\sin^2 zd}} + \frac{\cos \frac{1}{2} B''}{\sin zd}\right)$$

$$\cos do = \cos dz \cos zo + \sin zo \cos 45 \,.\left(\sqrt{\sin^2 zd - \cos^2 \frac{1}{2} B''} + \cos \frac{1}{2} B''\right)$$

$$\frac{\cos do}{\sin zo \cos 45} - \cos \frac{B''}{2} - \frac{\cos dz \,.\, \text{ctg}\, zo}{\cos 45} = \sqrt{1 - \cos^2 zd - \cos^2 \frac{1}{2} B''}$$

Man findet leicht (s. S. 45), weil $oz = 54^0\, 44'\, 8''$ ist,

$$\frac{\text{ctg}\, zo}{\cos 45} = 1 \text{ und } \frac{1}{\sin zo \cos 45} = \text{tg}\, 60$$

Mithin ist

$$\cos do\, \text{tg}\, 60 - \cos \frac{1}{2} B'' - \cos dz = \sqrt{1 - \cos^2 zd - \cos^2 \frac{1}{2} B''}$$

Setzt man zur Abkürzung $\cos do\ \text{tg}\ 60 - \cos \frac{1}{2} B'' = p$ und quadrirt, so erhält man

$$\cos^2 zd - p \cos zd = \frac{\sin^2 \frac{B''}{2}}{2} - \frac{p^2}{2}$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck dzh folgt

$$\cos dz = \cos hz \sin \frac{B''}{2}$$

Substituirt man diesen Werth für $\cos dz$ in die vorhergehende Gleichung, so ergibt sich

$$\cos^2 hz - p \frac{\cos hz}{\sin \frac{1}{2} B''} = \frac{1}{2} - \frac{p^2}{2 \sin^2 \frac{1}{2} B''}$$

Hieraus folgt

$$\left(\cos hz - \frac{p}{2 \sin \frac{1}{2} B''}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{p^2}{4 \sin^2 \frac{1}{2} B''} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p^2}{2 \sin^2 \frac{1}{2} B''}\right)$$

Setzt man endlich

$$\cos \gamma = \frac{p}{\sqrt{2} \sin \frac{1}{2} B''}$$

so folgt

$$\left(\cos hz - \frac{p}{2 \sin \frac{1}{2} B''}\right)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos^2 \gamma) = \frac{1}{2} \sin^2 \gamma$$

und hieraus

$$\cos hz = \frac{\cos \gamma}{\sqrt{2}} + \frac{\sin \gamma}{\sqrt{2}}$$

woraus

$$\cos hz = \cos (45 - \gamma)$$

mithin

$$\sin hz = \sin (45 - \gamma)$$

und

$$\cos dz = \cos (45 - \gamma) \sin \frac{1}{2} B''$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck hdx folgt

$$\cos dx = \sin \frac{B''}{2} \sin hz$$

Da ferner

$$dy = 90 - hd = \frac{B''}{2}$$

ist, so folgt

$$n = \frac{\cos dz}{\cos dx} = \frac{\cos (45 - \gamma) \sin \frac{1}{2} B''}{\sin \frac{1}{2} B'' \sin hz} = \operatorname{ctg} (45 - \gamma)$$

$$m = \frac{\cos dz}{\cos dy} = \frac{\cos (45 - \gamma) \sin \frac{1}{2} B''}{\cos \frac{1}{2} B''} = \cos (45 - \gamma) \operatorname{tg} \frac{1}{2} B''$$

Um m und n zu finden, hat man folgende Gleichungen zu berechnen:

$$2) \left\{ \begin{array}{ll} \sin do = \dfrac{\cos \frac{1}{2} C''}{\sin 60} & \lg \sin do = \lg \cos \frac{1}{2} C'' + 0{,}06247 \\ \cos \gamma = \dfrac{\cos do \operatorname{tg} 60 - \cos \frac{1}{2} B''}{\sqrt{2} \sin \frac{1}{2} B''} & \\ n = \operatorname{ctg} (45 - \gamma) & m = \cos (45 - \gamma) \operatorname{tg} \frac{1}{2} B'' \end{array} \right.$$

Beispiel. $\frac{B''}{2} = 83^0\, 5'\, 8''$ $\quad \frac{C''}{2} = 56^0\, 4'\, 5''$

$$\lg \cos \tfrac{1}{2} C'' = 9{,}74679$$
$$0{,}06247$$
$$\lg \sin do = 9{,}80926$$
$$do = 40^0\, 8'$$

$$\lg tg\, 60 = 0{,}23856$$
$$\lg \cos do = 9{,}88340$$
$$\lg \cos do\, tg\, 60 = 0{,}12196$$
$$\cos do\, tg\, 60 = 1{,}32423$$
$$\cos \tfrac{1}{2} B'' = 0{,}12039$$
$$\cos do\, tg\, 60 - \cos \tfrac{1}{2} B'' = 1{,}20384$$

$$\lg 1{,}203\ldots = 0{,}08057$$
$$E\, \tfrac{1}{2} \lg 2 = 9{,}84950$$
$$E \lg \sin \tfrac{1}{2} B'' = 0{,}00317$$
$$\lg \cos \gamma = 9{,}93324$$
$$\gamma = 30^0\, 57'\, 40''$$
$$\lg n = \lg ctg\, (45 - \gamma) = 0{,}60197$$
$$n = 3{,}9992 = 4$$
$$\lg \cos (45 - \gamma) = 9{,}98683$$
$$\lg tg\, \tfrac{1}{2} B'' = 0{,}91625$$
$$0{,}90308$$
$$m = 7{,}9999 = 8$$

Die Indices der Fläche d sind $\frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ 1$ oder $\dot{2}\ 1\ 8$. Die Formel des Dyakisdodekaëders ist $\left[\frac{{}_8O_4}{2}\right]$

c) Gegeben A″ und C″, gesucht die Indices der Fläche k.

In der Fig. 27 sei k die Projection der Dyakisdodekaëderfläche $1\ \frac{\dot{1}}{n}\ \frac{1}{m}$. Die Gleichung der Fläche k ist

$$\cos kx = n \cos ky = m \cos kz$$

woraus folgt

$$m = \frac{\cos kx}{\cos kz} \text{ und } n = \frac{\cos kx}{\cos ky}$$

Es ist $ox = 54^0\, 44'\, 8''$ und $oxz = 45^0$; $ok = od$ wird berechnet wie vorher aus der Gleichung

$$\sin ok = \frac{\cos \tfrac{1}{2} C''}{\sin 60}$$

Aus den beiden Dreiecken qkx und xok folgt, da $qk = 90 - \frac{A''}{2}$ ist,

$$\cos \frac{A''}{2} = \sin kx \sin \beta'$$

wobei $\beta' = qxk$ ist, und

$$\cos ko = \cos ox \cos kx + \sin ox \sin kx \cos (\beta' - 45)$$

Die Lösung dieser beiden Gleichungen ist in der vorhergehenden Aufgabe gelehrt worden. m und n findet man aus folgenden Gleichungen:

$$3)\left\{\begin{array}{l} \sin ok = \dfrac{\cos \frac{1}{2} C''}{\sin 60} \qquad \lg \sin ok = \lg \cos \frac{1}{2} C'' + 0{,}06247 \\ \cos \gamma = \dfrac{\operatorname{tg} 60 \cos ok - \cos \frac{1}{2} A''}{\sqrt{2} \sin \frac{1}{2} A''} \\ m = \operatorname{ctg} (45 - \gamma) \qquad n = \cos (45 - \gamma) \,.\, \operatorname{tg} \frac{1}{2} A'' \end{array}\right.$$

Beispiel. $\frac{A''}{2} = 67^0\, 1'$ $\qquad \frac{C''}{2} = 60^0\, 51''$

$$\begin{aligned} \lg \cos \tfrac{1}{2} C'' &= 9{,}6876 \\ &\ 0{,}0625 \\ \hline \lg \sin ok &= 9{,}7501 \\ ok &= 34^0\, 13' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg \operatorname{tg} 60 &= 0{,}2386 \\ \lg \cos ok &= 9{,}9174 \\ \hline \lg \operatorname{tg} 60 \cos ok &= 0{,}1560 \\ \operatorname{tg} 60 \cos ok &= 1{,}4323 \\ \cos \tfrac{1}{2} A'' &= 0{,}3906 \\ \hline \operatorname{tg} 60 \cos ok - \cos \tfrac{1}{2} A'' &= 1{,}0417 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg 1{,}04\ldots &= 0{,}0177 \\ E\, \tfrac{1}{2} \lg 2 &= 9{,}8495 \\ E \lg \sin \tfrac{1}{2} A'' &= 0{,}0359 \\ \hline \lg \cos \gamma &= 9{,}9031 \\ \gamma &= 36^0\, 51' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg \cos (45 - \gamma) &= 9{,}9956 \\ \lg \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A'' &= 0{,}3724 \\ \hline \lg n &= 0{,}3680 \\ n &= 2{,}3335 = \tfrac{7}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg m = \lg \operatorname{ctg} (45 - \gamma) &= 0{,}8441 \\ m = 6{,}98 &= 7 \end{aligned}$$

Die Indices der Fläche k sind daher $1 \frac{3}{7} \frac{1}{7}$ oder 7 3 1.

Die Formel des Dyakisdodekaëders ist $\left[\frac{7 0 \frac{7}{3}}{2}\right]$

Berechnung der Pentagondodekaëder.

In der Fig. 28 sei d die Projection der Pentagondodekaëderfläche $\frac{1}{n} 0 1$ oder $1 0 n$. k und e seien die Projectionen der Pentagondodekaëderflächen $1 \frac{1}{n} 0$ und $0 1 \frac{1}{n}$. Die Gleichung der Fläche d ist

$$n \cos dx = \cos dz$$

$$n = \frac{\cos dz}{\cos dx}$$

Fig. 28.

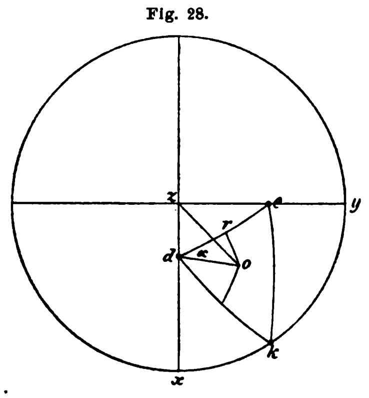
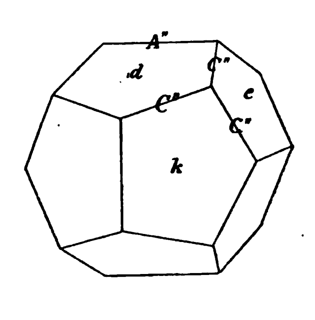


Fig. 28a.



a) Gegeben A'', gesucht die Indices der Fläche d.

In der Fig. 28 sei $dz = 90 - \frac{A''}{2}$, so ist

$$dx = 90 - dz = \frac{A''}{2}. \quad \text{Mithin}$$

$$1) \quad n = \frac{\sin \frac{A''}{2}}{\cos \frac{A''}{2}} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A''$$

b) Gegeben C'', gesucht die Indices der Fläche d.

Es ist (s. Fig. 28) $dk = ke = de = 180 - \frac{C''}{2}$

Aus dem sphärischen Dreieck dke erhält man (s. S. 58)

$$\sin \frac{1}{2} kde = \frac{\cos 60}{\sin \frac{1}{2} C''} = \sin \alpha$$

Halbirt man de und dk und zieht in den Halbirungspunkten senkrecht zu de und dk grösste Kreise, so schneiden diese sich im Punkte o und es ist leicht einzusehen, dass o die Projection der Oktaëderfläche 1 1 1 ist und dass $\sphericalangle\, ozx = 45$ und $oz = 54^0\, 44'\, 8''$ ist.

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck dor folgt

$$\cos dor = \cos dr \sin \alpha = \sin \tfrac{1}{2} C'' \sin \alpha = \cos 60$$

mithin

$$dor = 60.$$

Aus demselben Dreieck dor folgt auch

$$\sin do = \frac{\cos \frac{1}{2} C''}{\sin 60}$$

Aus dem sphärischen Dreieck doz folgt nun

$$\cos do = \cos dz \cos oz + \sin dz \sin oz \cos 45$$

Setzt man in dieser Gleichung

$$\sin oz \cos 45 = \cos oz \operatorname{ctg} \varphi$$

so ist

$$\cos do = \cos oz (\cos dz + \sin dz \operatorname{ctg} \varphi) = \cos oz \frac{\sin (\varphi + dz)}{\sin \varphi}.$$

woraus

$$\sin (\varphi + dz) = \frac{\cos do \sin \varphi}{\cos oz}$$

Aus der Gleichung $\sin oz \cos 45 = \cos oz \operatorname{ctg} \varphi$ folgt

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\cos oz}{\sin oz \cos 45}$$

und daraus, weil $\operatorname{ctg} oz = \cos 45$ (s. S. 45),

$$\varphi = 45^0$$

Mithin

$$\sin(45 + dz) = \frac{\cos do \cdot \sin 45}{\cos oz}$$

Da ferner $dx = 90 - dz$, folglich $\cos dx = \sin dz$ ist, so hat man, um n zu finden, folgende Gleichungen zu berechnen:

$$2)\left\{\begin{array}{c} \sin do = \frac{\cos \frac{1}{2} C''}{\sin 60} \\ \sin(45 + dz) = \frac{\sin 45}{\cos oz} \cos do \\ n = \operatorname{ctg} dz \\ \lg \sin do = \lg \cos \frac{1}{2} C'' + 0{,}06247 \\ \lg \sin(45 + dz) = \lg \cos do + 0{,}08805 \\ \lg n = \lg \operatorname{ctg} dz \end{array}\right.$$

Beispiel. $\frac{C''}{2} = 56^0\,47'\,20''$

$$\begin{aligned} \lg \cos \tfrac{1}{2} C'' &= 9{,}73856 \\ & \underline{0{,}06247} \\ \lg \sin do &= 9{,}80103 \\ do &= 39^0\,13'\,55'' \\ \lg \cos do &= 9{,}88907 \\ & \underline{0{,}08805} \\ \lg \sin(45 + dz) &= 9{,}97712 \\ 45 + dz &= 71^0\,33'\,50'' \\ dz &= 26^0\,33'\,50'' \\ \lg n = \lg \operatorname{ctg} dz &= 0{,}30103 \\ n &= 2 \end{aligned}$$

Die Indices der Fläche d sind daher $\frac{1}{2}\;0\;1$ oder $1\;0\;2$

Die Formel des Pentagondodekaëders ist $\frac{\infty O 2}{2}$

Berechnung complicirter Combinationen.

§. 9.

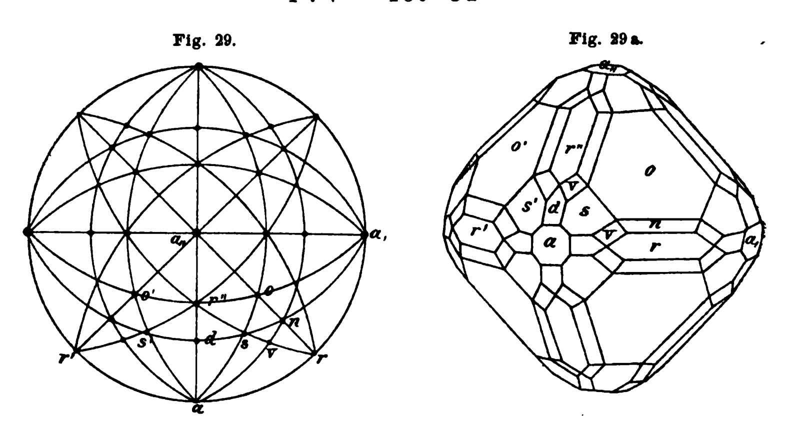
Erstes Beispiel (Rothkupfererz).

Nach Mohs und Phillips [1]) kommt am Rothkupfererz die Combination Fig. 29 a vor. Eine allgemeine Bestimmung ergibt, dass

o das Oktaëder O
a das Hexaëder ∞ O ∞
r das Rhombendodekaëder ∞. O
s ein Ikositetraëder m O m
n ein Triakisoktaëder m O
d ein Tetrakishexaëder ∞ O n
v ein Hexakisoktaëder m O n ist.

Bekannt durch Messung sind die Winkel (Fig. 29 a)

$$r : n = 160^0\ 32'$$
$$r : v = 160^0\ 54'$$



Die Fig. 29 ist eine stereographische Projection der Combination. Die gleichen Buchstaben in beiden Figuren bedeuten dieselben Flächen.

[1]) Vergl. Phillips, Mineralogy 1823, S. 307 und Naumann, Lehrb. d. reinen u. angewandten Krystall. 1830, Bd. 1, S. 242.

Eine Betrachtung der Fig. 29a lehrt, dass wegen des Parallelismus der Kanten die Flächen r v s v r″ tautozonal sind. Die Fläche s lässt sich mithin vermöge der Zonengleichung 4 aus den Indices von r und r″ in folgender Weise bestimmen:

$$\begin{array}{lccccc} \text{Indices von r:} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & \times & \times & \times & \\ \text{Indices von r}'' \text{:} & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline & & 1 & \bar{1} & \bar{1}\,^{1)} & \end{array}$$

Indices von s: m 1 1, folglich, da $eu + fv + gw = 0$ ist,

$$m - 1 - 1 = 0, \text{ woraus}$$
$$m = 2$$

Die Indices von s sind mithin 2 1 1. Die Ableitungszahlen folglich $\frac{1}{2}$ 1 1 oder 1 2 2. Die Formel folglich $_2O_2$.

Es ist daher

$$s = {_2O_2}$$

Das Tetrakishexaëder d (s. Fig. 29a) liegt wegen des Parallelismus der Kanten in der Zone s d s′. Es lässt sich mithin aus den Indices von s und s′ bestimmen:

$$\begin{array}{lcccccc} \text{Indices von s:} & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ & & \times & \times & \times & \\ \text{Indices von s}' \text{:} & 2 & \bar{1} & 1 & 2 & \bar{1} \\ \hline & & 2 & 0 & \bar{4}, & \text{oder mit 2 dividirt:} \\ & & 1 & 0 & \bar{2} & \\ \text{Indices von d:} & & n & 0 & 1, & \text{folglich vermöge Gl. 4:} \\ \hline & & \multicolumn{3}{c}{n - 2 = 0,} & \text{woraus} \\ & & \multicolumn{3}{c}{n = 2} & \end{array}$$

Mithin ist

$$d = \infty O_2 \text{ oder } (2\,0\,1)$$

Zur Bestimmung der Fläche n dient der Winkel r n = 19° 28′ (Fig. 29). Dieser Winkel r n in Fig. 29 ist = 180 — r : n in Fig. 29a.

Wir geben hier 4 Methoden zur Bestimmung der Fläche n.

---

[1]) Es ist $\bar{1} = -1$, ebenso $\bar{3} = -3$ u. s. w.

Erste Methode. Die Indices von n seien m m 1, so ist nach Gl. 2 die Gleichung von n, weil die Axenlängen a b c der Grundebene gleich 1 1 1 sind:

$$\frac{\cos n a}{m} = \frac{\cos n a_{,}}{m} = \frac{\cos n a_{,,}}{1}$$

Mithin

$$m = \frac{\cos n a_{,}}{\cos n a_{,,}}$$

$n a_{,}$ wird aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck $n a_{,} r$ berechnet. In diesem Dreieck ist $r n = 19^{0}\,28'$ und $r a_{,} = 45$ und $\sphericalangle\, n r a_{,} = 90$, folglich ist:

$$\cos n a_{,} = \cos r n \,.\, \cos r a_{,}$$

Nun ist noch $n a_{,,} = 90 - r n = 70^{0}\,32'$, folglich

$$m = \frac{\cos 19^{0}\,28' \,.\, \cos 45}{\cos 70^{0}\,32'}$$

Daraus folgt

$$m = 2$$

Mithin ist

$$n = {}_{2}O \text{ oder } (2\ 2\ 1)$$

Zweite Methode. Die 4 Flächen $a_{,,}$, o, n und r sind tautozonal; die Winkel, die sie unter einander bilden, sind bekannt, ausserdem kennt man die Indices von

$a_{,,}$ gleich 0 0 1,
o „ 1 1 1,
r „ 1 1 0.

Die Indices der vierten Fläche n, die wir gleich m m 1 setzen, können mithin vermöge Gl. 10 und 11 Seite 14 gefunden werden.

Da in diesem Falle $P P' = 90$ ist, so folgt

$$\lambda = \frac{\operatorname{ctg} n a_{,,}}{\operatorname{ctg} o a_{,,}}$$

Der Winkel $o a_{,,}$, den die Normale auf die Oktaëderfläche mit der Normale auf die Würfelfläche bildet, ist $54^{0}\,44'$, mithin ergibt sich

$$\lambda = 0{,}5 = \frac{1}{2}$$

folglich

$$p = 1 \qquad q = 1 \qquad r = \frac{1}{2}$$

Die Parameter der Fläche n sind mithin 1 1 2, folglich ist

$$n = 2O \text{ (wie oben).}$$

Dritte Methode. Nach Gl. 16 (S. 26) ist, wenn man die Indices von r gleich 1 1 0, von n gleich m m 1 setzt:

$$\cos rn = \frac{2m}{\sqrt{2}\,\sqrt{2m^2+1}} = \frac{m\sqrt{2}}{\sqrt{2m^2+1}}$$

Daraus folgt

$$\operatorname{tg} rn = \frac{1}{m\sqrt{2}}$$

und daraus folgt

$$m = \frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{tg} rn}$$

Daraus

$$m = 2$$

folglich ist

$$n = 2O \text{ (wie oben).}$$

Vierte Methode. Ist, wie in Fig. 29, n richtig construirt, so sieht man sofort, dass es mit dem Durchschnittspunkt der beiden Zonen $a_{,}sd$ und ro zusammenfällt; es kann mithin nach Gl. 5 in folgender Weise berechnet werden:

Indices von d: 2 0 1 2 0 — Indices von r: 1 1 0 1 1

Indices von $a_{,}$: 0 1 0 0 1 — Indices von $a_{,,}$: 0 0 1 0 0

$uvw = \bar{1}\ 0\ 2$ — $u_{,}v_{,}w_{,} = 1\ \bar{1}\ 0$

uvw: $\bar{1}\ 0\ 2\ \bar{1}\ 0$

$u_{,}v_{,}w_{,}$: $1\ \bar{1}\ 0\ 1\ \bar{1}$

Indices von n: 2 2 1

Ableitungszahlen von n: $\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$ 1 oder 1 1 2

mithin

$$n = 2O \text{ (wie oben).}$$

Hieraus erkennt man augenfällig die Vortheile, die eine stereographische Projection bietet. Durch alleinige Anwendung des bekannten Schemas konnten auf Grund der Projection die Indices von n ermittelt werden.

Es erübrigt noch die Berechnung von v.

Erste Methode. Der Rechnung voraus geht die Construction. Um v stereographisch zu projiciren, verfährt man nach Aufgabe 2 und 4 des §. 4 S. 14 in folgender Weise: Der Winkel rv $= 180 - 160^0\,54' = 19^0\,6'$ ist gegeben. Man suche die Projection des Poles des Kreises r s r″ (in einer Hilfsfigur), trage den Winkel $19^0\,6'$ von r aus nach a hin auf r a ab, verbinde den erhaltenen Punkt mit der gesuchten Projection des Poles, so schneidet die Verbindungslinie den Bogen r s in v. Legt man durch v und a einen grössten Kreis, so bemerkt man, dass er durch n geht, mithin kann v wieder in der einfachsten Weise als der Durchschnittspunkt der Zonen a n und r s in folgender Weise berechnet werden.

Indices von r: 1 1 0 1 1 Indices von a: 1 0 0 1 0

Indices von s: 2 1 1 2 1 Indices von n: 2 2 1 2 2

$uvw = 1\ \bar{1}\ \bar{1}$ $\qquad u_, v_, w_, = 0\ \bar{1}\ 2$

$uvw:\ 1\ \bar{1}\ \bar{1}\ 1\ \bar{1}$

$u_, v_, w_,:\ 0\ \bar{1}\ 2\ 0\ \bar{1}$

$\bar{3}\ \bar{2}\ \bar{1}$ oder 3 2 1

Die Ableitungszahlen für v sind mithin $\frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ 1$ oder $1\ \frac{3}{2}\ 3$ und die Formel ist $3O\frac{3}{2}$ oder (3 2 1).

Zweite Methode. v kann auch in folgender, viel weniger einfachen Weise berechnet werden. v liegt in der Zone r s, deren u v w nach dem Vorhergehenden $1\ \bar{1}\ \bar{1}$ ist. Die Indices von v seien $1\ \frac{1}{n}\ \frac{1}{m}$, so muss nach Gl. 4 sein:

$$1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m} = 0$$

Daraus folgt

$$n = \frac{m}{m - 1}$$

Die Gleichung von v ist mithin

$$\cos va = \frac{m}{m-1} \cos va, = m \cos va''$$

Mithin

$$\frac{m-1}{m} = \frac{\cos va,}{\cos va}$$

In dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck rar'' ist $ra = ar'' = 45^0$, folglich

$$\sin ra = \operatorname{ctg} vra \operatorname{tg} r''a$$

woraus

$$\operatorname{ctg} vra = \cos 45$$
$$vra = 54^0\,44'$$

Aus den sphärischen Dreiecken vra und $vra,$ folgt

$$\cos av = \cos vr \cos ra + \sin vr \sin ra \cos vra$$
$$\cos a,v = \cos vr \cos ra, - \sin vr \sin ra, \cos vra$$

Durch Division folgt

$$\frac{\cos a,v}{\cos av} = \frac{\cos vr - \sin vr \cos vra}{\cos vr + \sin vr \cos vra} = \frac{1 - \operatorname{tg} vr \cos vra}{1 + \operatorname{tg} vr \cos vra}$$

Setzt man $vr = 19^0\,6'$ und $vra = 54^0\,44'$, so folgt

$$\frac{m-1}{m} = \frac{\cos a,v}{\cos av} = \frac{0,8}{1,2} = \frac{2}{3}$$

mithin

$$m = 3 \text{ und } n = \frac{3}{2}$$

daher

$$v = {}_3O\tfrac{3}{2}$$

Dritte Methode. Endlich kann v auch mit Hilfe der Gl. 16 in folgender Weise berechnet werden. In dieser Gleichung setzen wir für hkl die Indices von v: $1\ \frac{1}{n}\ \frac{1}{m}$ und für $h'k'l'$ die Indices von r: 1 1 0 und erhalten:

$$\cos rv = \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2}}} = \frac{mn + m}{\sqrt{2}\,\sqrt{m^2n^2 + m^2 + n^2}}$$

Setzt man $n = \frac{m}{m-1}$, so geht die Gleichung über in:

$$\cos rv = \frac{2m-1}{2\sqrt{m^2+1-m}}$$

Daraus folgt

$$\operatorname{tg} rv = \frac{\sqrt{3}}{2m-1}$$

und daraus

$$2m-1 = \frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg} rv}$$

Setzt man in diese Gleichung $rv = 19^0\,6'$, so ergibt sich $2m - 1 = 5$, mithin $m = 3$ und folglich $n = \frac{3}{2}$. Daher ist

$$v = {}_3O\tfrac{3}{2}$$

Zweites Beispiel (Kobaltnickelkies, Kobaltkies).

Die Fig. 30a repräsentirt nach Phillips [1]) eine Combination des Kobaltnickelkieses. Eine allgemeine Bestimmung lehrt, dass

Fig. 30.

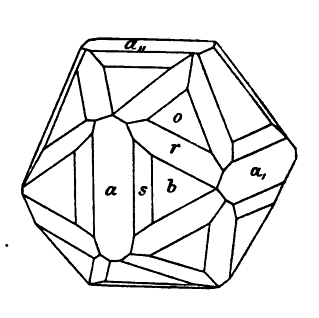


Fig. 30 a.

b ein Pentagondodekaëder $\frac{\infty O n}{2}$

s ein Pentagondodekaëder $\frac{\infty O n'}{2}$

[1]) Vergl. Naumann, Lehrb. d. reinen u. angewandten Krystallographie 1830, Bd. 1, S. 250, Fig. 236.

a das Hexaëder $\infty O \infty$
o das Oktaëder O
r ein Dyakisdodekaëder $\left[\frac{m O n}{2}\right]$ ist.

Bekannt durch Messung sind die Winkel

$$a : b = 153^0\,26' \text{ (Fig. 30 a),}$$
$$a : s = 166^0 \quad " \quad "$$
$$o : r = 163^0\,27' \quad " \quad "$$

Die Fig. 30 gibt eine stereographische Projection des Krystalls. Die gleichen Buchstaben bedeuten dieselben Flächen.

Zuerst bestimmen wir b.

Die Indices von b seien n 1 0. Die Gleichung von b ist daher

$$\frac{\cos b a}{n} = \frac{\cos b a_{,}}{1}$$

woraus

$$n = \frac{\cos b a}{\cos b a_{,}} = \frac{\cos b a}{\cos (90 - b a)} = \operatorname{ctg} b a$$

Setzen wir für b a seinen Werth: $26^0\,34'$, so erhalten wir $n = 2$.

Mithin ist

$$b = \frac{\infty O_2}{2} \text{ oder } \pi\,(2\,1\,0)$$

Ebenso ergibt sich

$$s = \frac{\infty O_4}{2} \text{ oder } \pi\,(4\,1\,0)$$

Wie im vorhergehenden Beispiele, so könnten auch hier noch 2 andere Methoden zur Berechnung von b und s verwendet werden und zwar die Gl. 10 und 11, da die 4 Flächen a b $a_{,}$ und die Rhombendodekaëderfläche mitten zwischen a und $a_{,}$ tautozonal und die Winkel derselben bekannt sind. Auch die Gl. 16 führt zum Ziel. Dieselbe liefert gleichfalls $n = \operatorname{ctg} b a$.

Um r zu berechnen, bedenken wir zuerst, dass b r o tautozonal sind. Die Indices von r seien $1\,\frac{1}{n}\,\frac{1}{m}$

$$\begin{array}{lcccccc}
\text{Indices von o:} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & \times & \times & \times & \\
\text{Indices von b:} & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\
\hline
 & & \bar{1} & 2 & \bar{1} & \\
\text{Indices von r:} & & 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{m}, & \text{folglich vermöge Gl. 4:}
\end{array}$$

$$-1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{m} = 0, \text{ woraus}$$

$$n = \frac{2m}{m+1}$$

Die Indices von r sind mithin: $1 \ \frac{m+1}{2m} \ \frac{1}{m}$. Die Gleichung von r ist:

$$\frac{\cos ra}{1} = \frac{2m}{m+1} \cos ra_{,} = m \cos ra_{,,}$$

Daraus folgt

$$\frac{m+1}{2m} = \frac{\cos ra_{,}}{\cos ra}$$

In dem sphärischen Dreieck $oba_{,,}$ ist $\sphericalangle ba_{,,}o = 45 - aa_{,,}b = 45 - ab = 18^{0}\,26'$, ferner $ba_{,,} = 90$ und $oa_{,,} = 54^{0}\,44'$ (Winkel, den die Normalen auf die Würfelfläche und Oktaëderfläche mit einander bilden). Daher

$$\cos ob = \sin oa_{,,} \cos ba_{,,}o = \sin 54^{0}\,44' \cos 18^{0}\,26'$$
$$ob = 39^{0}\,14'$$

Aus dem sphärischen Dreieck $oba_{,}$ folgt

$$\cos oa_{,} = \cos ob \cos a_{,}b + \sin ob \sin a_{,}b \cos oba_{,}$$

woraus

$$\cos oba_{,} = \frac{\cos oa_{,} - \cos ob \sin ab}{\sin ob \cos ab}$$

Nun ist $oa_{,} = 54^{0}\,44'$, $ab = 26^{0}\,34'$, folglich ergibt sich

$$oba_{,} = 65^{0}\,54'\,10''$$

Aus den 2 sphärischen Dreiecken $ra_{,}b$ und rba folgt

$$\cos ra_{,} = \cos rb \cos a_{,}b + \sin rb \sin a_{,}b \cos rba_{,}$$

und

$$\cos ra = \cos rb \sin ab - \sin rb \sin ab \cos rba,$$

Durch Division folgt

$$\frac{\cos r a_1}{\cos r a} = \frac{\operatorname{tg} a b - \operatorname{tg} r b \cos r b a}{1 - \operatorname{tg} r b \cos r b a \,.\, \operatorname{tg} a b}$$

Setzt man

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} r b \cos r b a,$$

so ist

$$\frac{m - 1}{2 m} = \frac{\cos r a_1}{\cos r a} = \frac{\operatorname{tg} a b - \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} a b \operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{tg} (a b - \varphi)$$

Da $r b a_1 = o b a_1 = 65^\circ\, 54'\, 10''$ ist, so ergibt sich

$$\varphi = 9^\circ\, 41', \text{ folglich } a b - \varphi = 36^\circ\, 15'$$

$$\frac{m + 1}{2 m} = 0{,}73328$$

$$m = 2{,}1439 = \frac{15}{7}$$

annähernd. Mithin

$$n = \frac{2 m}{m + 1} = \frac{15}{11}$$

Daher

$$r = \left[\frac{\frac{15}{7} O \frac{15}{11}}{2}\right] \text{ oder } \pi\, (15\; 11\; 7)$$

Zweite Methode. Vermöge der Gl. 16 könnte man r in folgender Weise berechnen:

$$\cos o r = \frac{n (m + 1) + m}{\sqrt{3} \sqrt{n^2 (m^2 + 1) + m^2}}$$

Setzt man in dieser Gleichung $n = \frac{2 m}{m + 1}$, so geht sie über in

$$\cos o r = \frac{\sqrt{3}\, (m + 1)}{\sqrt{5 m^2 + 2 m + 5}}$$

woraus

$$\operatorname{tg} o r = \frac{\sqrt{2}\, (m - 1)}{\sqrt{3}\, (m + 1)}$$

woraus

$$m = \frac{1 + \sqrt{1{,}5}\, \operatorname{tg} o r}{1 - \sqrt{1{,}5}\, .\, \operatorname{tg} o r}$$

Setzt man

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{1{,}5}\ \operatorname{tg}\ o\,r$$

so ist

$$m = \operatorname{tg}(\alpha + 45)$$

Daraus folgt wieder annähernd

$$m = \frac{15}{7}$$

Legt man in Fig. 30 durch $a_,$ und r einen grössten Kreis, so bemerkt man, dass er nahezu durch w geht. w ist der Durchschnittspunkt der 2 Zonen $a\,a_{,,}$ und o w. Für w erhält man daher die Indices 2 0 1. Nimmt man an, $a_, r$ gehe genau durch w, so kann r als Durchschnittspunkt der 2 Zonen o b und $w\,a_,$ bestimmt werden. Mit Hilfe des bekannten Schemas findet man alsdann für r die Indices 4 3 2, folglich die Ableitungszahlen $\frac{1}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}$ oder $1\ \frac{4}{3}\ 2$ und diese kommen den oben berechneten sehr nahe. Nimmt man diese Parameter als richtig an, so kann man o r aus der eben entwickelten Gleichung $\operatorname{tg}\ o\,r = \frac{\sqrt{2}\,(m-1)}{\sqrt{3}\,(m+1)}$ berechnen. Die Rechnung ergibt

	o r = 15° 13′ 30″
folglich	o : r = 164° 46′ 30″
Die Messung lieferte	o : r = 163° 27′
Differenz zwischen Rechnung und Messung =	1° 19′ 30″

Diese Differenz ist zu gross, als dass man die Parameter $1\ \frac{4}{3}\ 2$ als die richtigen ansehen könnte; folglich ist r nicht Durchschnittspunkt der Zonen o b und $w\,a_,$

Die Combination weist sonach folgende Formen auf:

$$\frac{\infty O_2}{2} \;.\; O \;.\; \infty O \infty \;.\; \frac{\infty O_4}{2} \;.\; \left[\frac{\frac{15}{7} O \frac{15}{11}}{2}\right]$$

b	.	o	.	a	.	s	.	r
π (2 1 0)	.	(1 1 1)	.	(1 0 0)	.	π (4 1 0)	.	π (15 11 7)

Drittes Beispiel (Boracit von Lüneburg¹).

Eine allgemeine Bestimmung lehrt, dass

q das Tetraëder $-\frac{O}{2}$

q' das Tetraëder $-\frac{O}{2}$

a der Würfel

r das Rhombendodekaëder ∞O

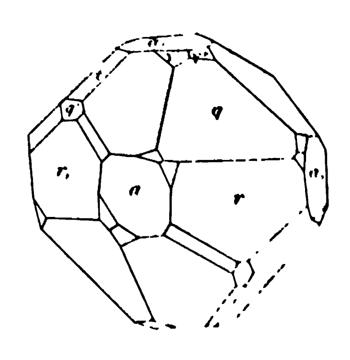
t ein Trigondodekaëder $-\frac{mOm}{2}$

γ' ein Hexakistetraëder $\frac{mOn}{2}$ ist.

Bekannt ist der Winkel $\gamma' a_{,,} = 32^{\circ}\,19'$ (Fig. 31) und
$\gamma' \gamma'' = 27^{\circ}\,40'$ (Fig. 31)

Fig. 31.

Fig. 31 a.



Die Fig. 31 ist die stereographische Projection der Combination, die Fig. 31 a eine parallelperspectivische Projection. t ergibt sich aus den beiden in t sich schneidenden Zonen r t und r, a,,
$$t = -\frac{2O2}{2}$$

[1]) Vergl. Schrauf, Atlas der Krystallformen IV, 1873, Taf. 36, Fig. 2 und auch C. Klein, Einleitung in die Krystallberechnung, Stuttgart, Schweizerbart, 1876, S. 136, Fig. 8, Taf. 3.

Um γ' zu berechnen und zu construiren, tragen wir zunächst γ' in einer Hilfszeichnung ungefähr richtig ein und berechnen das Dreieck $\gamma' s a_{,,}$, in welchem bekannt sind die Winkel

$\gamma' a_{,,} = 32^0\,19'$ und $\gamma' s = \frac{\gamma' \gamma''}{2}$ und $\gamma' s a_{,,} = 90$.

Man findet

$$s a_{,,} = 29^0\,24'\,30''$$

mithin

$$r s = 60^0\,35'\,30'' = \sphericalangle\, s r, r$$

Da $s a_{,,}$ nun bekannt ist, so ist es leicht, den Punkt s richtig zu construiren, und da $s \gamma' = \frac{\gamma' \gamma''}{2}$ ist, so ist es auch leicht, den Punkt γ' richtig zu projiciren. In ähnlicher Weise construirt man die anderen Punkte.

Erste Methode. Die Gleichung des Punktes γ', dessen Indices $\frac{1}{n} \frac{1}{m} 1$ sind, ist

$$\alpha)\ n \cos \gamma' a = m \cos \gamma' a_{,} = \cos \gamma' a_{,,}$$

In dem sphärischen Dreieck $\gamma' r_{,} a$ (in der Fig. 31 ist der Bogen $\gamma' a$ nicht gezeichnet) kennt man $\gamma' r = 90 - \gamma' s$, ferner $r' a = 45$ und $\gamma' r_{,} a = \gamma' r_{,} r = r s = 60^0\,35'\,30''$

Aus diesen Daten ergibt sich

$$\gamma' a = 59^0\,35'\,20''$$
$$\gamma' a r' = 101^0\,14'\,20''$$

Nach Gl. α ist

$$n = \frac{\cos \gamma' a_{,,}}{\cos \gamma' a} = 0{,}1669 = \frac{5}{3} \text{ annähernd.}$$

Aus dem sphärischen Dreieck $\gamma' a a_{,}$ folgt

$$\cos \gamma' a_{,} = \sin \gamma' a \cos \gamma' a a_{,} = \sin \gamma' a \cos (180 - \gamma' a r_{,})$$
$$\cos \gamma' a_{,} = \sin 59^0\,35'\,20'' \cos 78^0\,45'\,40''$$

Nach Gl. α ist

$$m = \frac{n \cos \gamma' a}{\cos \gamma' a_{,}} = \frac{5}{3} \,.\, 3 = 5$$

Zweite Methode. Vermittelst der Gl. 16 kann man auch m und n und zwar in folgender Weise berechnen.

$$\cos \gamma' a_{,,} = \frac{m\,n}{\sqrt{m^2 n^2 + m^2 + n^2}}, \text{ woraus } \operatorname{tg} \gamma' a_{,,} = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{m\,n}$$

oder

$$\beta)\ \operatorname{tg}^2 \gamma' a_{,,} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2}$$

Vermöge Gl. 16 S. 26 ist

$$\cos \gamma' \gamma'' = \frac{2\,m\,n + m^2 n^2}{m^2 n^2 + m^2 + n^2}$$

woraus

$$\sin \frac{\gamma' \gamma''}{2} = \frac{m - n}{\sqrt{2}\,\sqrt{m^2 n^2 + m^2 + n^2}}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich

$$\frac{\sqrt{2} \sin \frac{\gamma' \gamma''}{2}}{\cos \gamma' a_{,,}} = \frac{m - n}{m\,n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{m}$$

Aus dieser Gleichung und der Gl. β findet man m n, sodann m — n und endlich m + n; mithin auch m und n.

Setzt man

$$\cos \alpha = \frac{\sin \gamma' s}{\sin \gamma' a_{,,}} \text{ und } \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \gamma' a_{,,} \sin \alpha}{\cos \gamma' s}$$

und

$$\rho = \frac{-\sqrt{2} \operatorname{ctg} \gamma' a_{,,}}{\sin \gamma' a_{,,} \cos 2\alpha \cos \beta}$$

so ist

$$m = \rho \sin (\beta + \gamma' s)$$
$$n = \rho \sin (\beta - \gamma' s)$$

Man ersieht sofort, dass die erste Methode bloss die Auflösung sphärischer Dreiecke, die letztere dagegen eine bedeutende Uebung im Umformen trigonometrischer Gleichungen erfordert.

Die Combination weist mithin folgende Formen auf:

$$\frac{O}{2} \;.\; -\frac{O}{2} \;.\; \infty O \infty \;.\; \infty O \;.\; -\frac{2O2}{2} \;.\; +\frac{5O\frac{5}{3}}{2}$$

$$q \;.\; q' \;.\; a \;.\; r \;.\; t \;.\; \gamma'$$

$$\varkappa(1\,1\,1) \;.\; \varkappa(1\,\bar{1}\,1) \;.\; (1\,0\,0) \;.\; (1\,1\,0) \;.\; \varkappa(1\,\bar{1}\,2) \;.\; (3\,1\,5)$$

Viertes Beispiel (Eisenkies von Traversella [1]).

Die Fig. 32a ist eine parallelperspectivische Projection des Eisenkieses von Traversella. Die Fig. 32 eine stereographische Projection derjenigen Flächen, deren Berechnung auf der Auflösung sphärischer Dreiecke beruht. Auf eine vollständige Projection ist in diesem Falle verzichtet worden, damit die zu

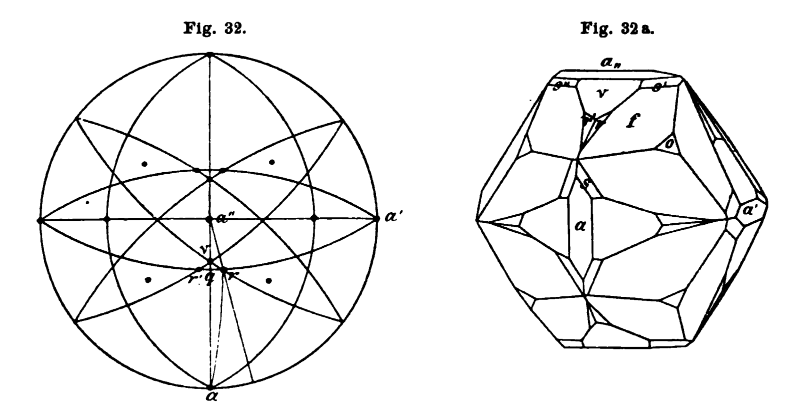


Fig. 32. Fig. 32a.

berechnenden sphärischen Dreiecke dem Beschauer schneller in die Augen fallen.

Eine allgemeine Bestimmung lehrt, dass (s. Fig. 32a)

f, s und r drei Dyakisdodekaëder $\left[\frac{m\,O\,n}{2}\right]$

ν ein Pentagondodekaëder $\frac{\infty\,O\,n}{2}$

a der Würfel $\infty\,O\,\infty$

o das Oktaëder O ist.

Bekannt sind die Winkel $A'' = 115^{0}\,22'$ und $B'' = 149^{0}$ des Dyakisdodekaëders f (vergl. S. 56);

ferner $r : r' = 167^{0}\,54'$ (Kante B'' des Dyakisdodekaëders r),

ferner $r : \nu = 171^{0}\,52'$

[1]) Vergl. Strüver, Studi sulla Mineralogia Italiana, 1869, Taf. VI, Fig. 104 und auch Klein, Einleitung in die Krystallberechnung, Stuttgart 1876, S. 140, Fig. 1, Taf. 4.

Das Dyakisdodekaëder f wird mit Hilfe der S. 56 entwickelten Gleichungen

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \frac{1}{2} B''}{\cos \frac{1}{2} A''} \qquad \sin d z = \frac{\cos \frac{1}{2} B''}{\sin \alpha}$$

$$n = \frac{\operatorname{ctg} d z}{\cos \alpha} \qquad m = \frac{\operatorname{ctg} d z}{\sin \alpha}$$

berechnet. Man findet $m = 3$ und $n = \frac{3}{2}$; mithin sind die Indices von f: 2 1 3. Die Formel des Dyakisdodekaëders ist $\left[\frac{3 O \frac{3}{2}}{2}\right]$

ν liegt in der Zone (s. Fig. 32a) o f ν. Daher ergeben sich vermöge der Zonengleichung 4 die Indices von ν: 1 0 2.

$$\nu = \frac{\infty O 2}{2}$$

s′ liegt in den Zonen f s′ a″ und s′ ν s″ (s. Fig. 32a). Daher finden sich nach dem bekannten Schema und nach Gl. 4, S. 8 die Indices von s′: 2 1 4.

$$s' = \left[\frac{4 O 2}{2}\right]$$

Da $\nu = \frac{\infty O 2}{2}$ gefunden worden ist, so kann der Winkel a″ ν (Fig. 32) vermöge Gl. 16, S. 26 und auch vermöge der Gl. 2, S. 4 gefunden werden. Die Rechnung ergibt

$$a'' \nu = 26^0\, 34'$$

Um nun r zu finden, legen wir durch r und a′ (s. Fig. 32) einen grössten Kreis und berechnen das rechtwinklige sphärische Dreieck r ν q, in dem bekannt sind die Winkel $r q = \frac{r r'}{2} = 6^0\, 3'$ und $r \nu = 8^0\, 8'$. Die Rechnung ergibt

$$q \nu = 5^0\, 26'$$

Es seien die Indices von $r : \frac{1}{n}\ \frac{1}{m}\ 1$ so ist die Gleichung von r:

$$n \cos r a = m \cos r a' = \cos r a''$$

Aus den rechtwinkligen sphärischen Dreiecken
r q a'' und r q a folgt
$\cos ra'' = \cos rq \cos qa''$ und
$\cos ra = \cos rq \cos qa$

Da $a''q = a''\nu + \nu q = 32^0$ ist, so folgt

$$n = \frac{\cos ra''}{\cos ra} = \frac{\cos rq \cos qa''}{\cos rq \cos qa} = \operatorname{ctg} qa'' = 1{,}600 = \frac{8}{5}$$

$$m = \frac{\cos ra''}{\cos ra'} = \frac{\cos rq \cos qa''}{\sin rq} = \operatorname{ctg} rq \cos qa'' = 8$$

Daher ist

$$r = \left[\frac{8O\frac{8}{5}}{2}\right].$$ Die Indices von r sind 5 1 8.

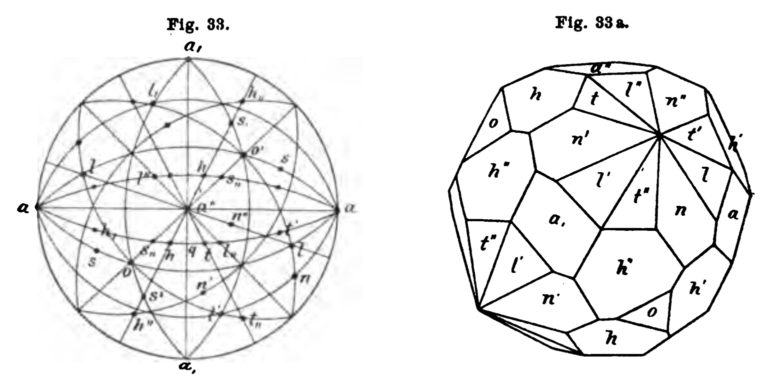
Die Combination weist mithin auf:

$$\left[\frac{3O\frac{3}{2}}{2}\right] . \frac{\infty O 2}{2} . \left[\frac{4O2}{2}\right] . \left[\frac{8O\frac{8}{5}}{2}\right] . \infty O \infty . O$$
$$f \quad . \quad \nu \quad . \quad s \quad . \quad r \quad . \quad a \quad . \; o$$

Fünftes Beispiel. (Baryumnitrat.) [1])

Baryumnitrat krystallisirt nach den Untersuchungen von W. J. Lewis tetartoëdrisch, eine Thatsache, die die früheren

Fig. 33. Fig. 33a.



Untersuchungen von Scacchi [2]) und Baumhauer [3]) vollkommen bestätigt.

[1]) S. Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie, II. Band, 1. Heft, 1877, S. 64, Taf. 4, Fig. 1 u. 2.
[2]) Poggendorffs Ann. d. Phys. 109, 366.
[3]) Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie, 1. Heft, S. 51.

Die Fig. 33a gibt ein parallelperspectivisches Bild des Krystalls; die Fig. 33 ist die stereographische Projection. In der Fig. 33a fehlen die Flächen s des negativen Trigondodekaëders: $-\frac{m0m}{2}$. Eine allgemeine Bestimmung lehrt, dass

a der Würfel $\infty 0 \infty$

t ein tetraëdrisches Pentagondodekaëder $+\frac{m0n}{4}\,l$

n „ „ „ $+\frac{m0n}{4}\,r$

h „ „ „ $-\frac{m0n}{4}\,r$

o das negative Tetraëder $-\frac{0}{2}$

l ein positives Trigondodekaëder $+\frac{m0m}{2}$

s (Fig. 33) ein negatives Trigondodekaëder $-\frac{m0m}{2}$

Durch Messung wurden folgende Winkel ermittelt (s. Fig 33):

$at_{,} = 29^{0}17'$ $an = 32^{0}9'$

$at_{,,} = 64^{0}\ 1'$ $an_{,} = 80^{0}22'$

$at = 77^{0}14'$ $on_{,,} = 73^{0}\ 8'$

Ausserdem ist durch Messung ermittelt worden, dass l in den Zonen ao und nlo'

dass ferner $s_{,,}$ in den Zonen $oa_{,,}$ und at und

dass h in den Zonen $s_{,}h$ und at liegt.

Berechnung von t.

Die Indices von t seien $\frac{1}{n}\ \frac{1}{m}\ 1$, dann sind

die Indices von $t_{,}$: $\frac{1}{m}\ 1\ \frac{1}{n}$

Die Gleichung von t ist: $n \cos a_{,}t = m \cos at = \cos a_{,,}t$

Die Gleichung von $t_{,}$ ist: $m \cos a_{,}t_{,} = \cos at_{,} = n \cos a_{,,}t_{,}$

Aus der zweiten Gleichung folgt $n = \frac{\cos at_{,}}{\cos a_{,,}t_{,}}$

Man nehme ein Hexakisoktaëder zur Hand und vergleiche die Lage der drei Flächen $t\ t_,$ und $t_{,,}$ so bemerkt man sofort, dass $a_{,,}t_, = a\,t_{,,}$ ist, folglich ist

$$n = \frac{\cos a\,t_,}{\cos a\,t_{,,}} = 1{,}991 = 2 \text{ annähernd.}$$

Aus der ersten der obigen Gleichungen folgt $m = \frac{\cos a_{,,} t}{\cos a\,t}$
Mit Hilfe eines Hexakisoktaëders findet man wieder $a_{,,}t = a\,t_,$ mithin ist

$$m = \frac{\cos a\,t_,}{\cos a\,t} = 3{,}947 = 4 \text{ annähernd.}$$

Mithin ist

$$t = + \frac{4O2}{4}\,1$$

Nun kann man leicht finden, dass die Flächen $a\,t_,t$ (Fig. 33) tautozonal sind.

Berechnung von n.

Die Indices von n seien $\frac{1}{n}\ 1\ \frac{1}{m}$

Die Gleichung von n ist: $n \cos a_,n = \cos a\,n = m \cos a_{,,}n$
Aus dieser Gleichung folgt:

$$m = \frac{\cos a\,n}{\cos a_{,,}n}. \text{ Da aber } a_{,,}n = a\,n_, \text{ ist, so folgt}$$

$$m = \frac{\cos a\,n}{\cos a\,n_,} = 5{,}06 = 5 \text{ annähernd.}$$

Nun hat man, um n zu finden, zunächst das Dreieck $o\,n_{,,}a_{,,}$ zu berechnen. In diesem Dreieck kennt man
$o\,n_{,,} = 73^0\,8'$ und $o\,a_{,,} = 54^0\,44'$ und $a_{,,}n_{,,} = a\,n = 32^0\,9'$
Mithin ergibt sich

$$o\,a_{,,}n_{,,} = 117^0\,13' \text{ und folglich } n_{,,}a_{,,}a = 17^0\,47'$$

Aus dem sphärischen Dreieck $a\,n_{,,}a_{,,}$ folgt nun:

$$a\,n_{,,} = 59^0\,33'\,30'' = a_,n$$

Aus der obigen Gleichung folgt

$$n = \frac{\cos a\,n}{\cos a_,n} = \frac{\cos a\,n}{\cos a\,n_{,,}} = 1{,}671$$

Verwandelt man 1,671 in einen Kettenbruch, so erhält man als zweiten Näherungswerth $\frac{5}{3}$. Mithin ist die Ableitungszahl $n = \frac{5}{3}$ und

$$n = + \frac{{}_5O_{\frac{5}{3}}}{4} r$$

Die anderen Flächen l s und h ergeben sich aus den oben angegebenen Zonen vermöge der Gl. 5, S. 9. Man findet:

$$l = + \frac{{}_3O_3}{2}$$

$$s = - \frac{{}_2O_2}{2} \text{ und}$$

$$h = - \frac{{}_4O_2}{4} r$$

Berechnet man mit Hilfe der Gl. 2, S. 4 oder der Gl. 16, S. 26 aus den gefundenen Indices die beobachteten Winkel und stellt die Resultate gegenüber, so ergibt sich:

Beobachtet:	Berechnet:	Differenz zwischen Beobachtung und Rechnung:
at, = 29° 17′	29° 12′	+ 5′
at,, = 64° 1′	64° 7′	— 6′
at = 77° 14′	77° 24′	— 10′
an = 32° 9′	32° 19′	— 10′
an, = 80° 22′	80° 16′	+ 6′
on,, = 73° 8′	72° 58′ 30″	+ $9\frac{1}{2}$′

Die Combination weist folgende Gestalten auf:

$$\infty O \infty . + \frac{{}_4O_2}{4} l . + \frac{{}_5O_{\frac{5}{3}}}{4} r . - \frac{{}_4O_2}{4} r . - \frac{O}{2}$$

a . t . n . h . o

$(100) . \varkappa\pi (214) . \varkappa\pi (351) . \varkappa\pi (2\bar{1}4) . \varkappa (1\bar{1}\bar{1})$

$$. + \frac{{}_3O_3}{2} . - \frac{{}_2O_2}{2}$$

. l . s

$. \varkappa (311) . \varkappa (2\bar{1}\bar{1})$

Tetragonales Krystallsystem.

Berechnung der einfachen Gestalten.

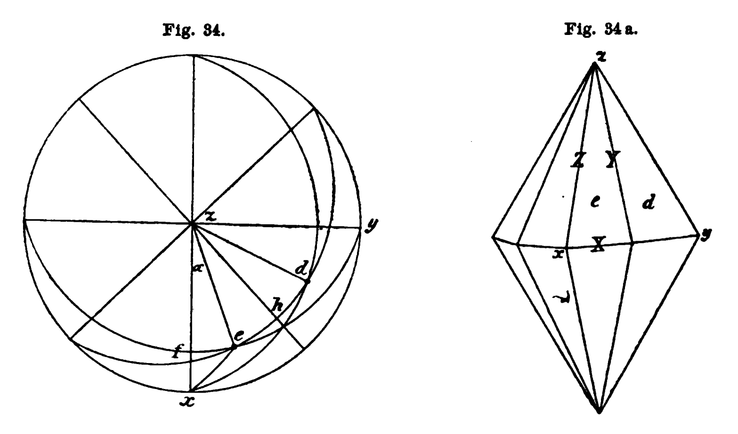
§. 10.

Berechnung der ditetragonalen Pyramiden.

Die Austrittspunkte der Axen sind durch x, y und z bezeichnet.

Die Polkante, die den Endpunkt der x-Axe mit dem Endpunkt der z-Axe verbindet, nennen wir Z, die darauffolgende Polkante Y und die Randkante X (s. Fig. 34 a).

Fig. 34. Fig. 34 a.



In der Fig. 34 sei e die Projection der ditetragonalen Pyramidenfläche

$1 \frac{1}{n} \frac{1}{m}$ und d die der Fläche $\frac{1}{n} 1 \frac{1}{m}$

Die Gleichung der Fläche e ist

$$\cos ex = n \cos ey = mc \cos ez$$

Wir haben nun cos ex, cos ey und cos ez zu ermitteln.

a) Gegeben Z und Y, gesucht die Indices der Fläche e.

Es ist $ef = 90 - \frac{Z}{2}$ und $eh = 90 - \frac{Y}{2}$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck efz folgt

$$\sin fe = \sin \alpha \sin ze$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ehz folgt

$$\sin eh = \sin (45 - \alpha) \sin ze$$

Aus beiden Gleichungen folgt durch Division

$$\frac{\sin (45 - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\cos \frac{1}{2} Y}{\cos \frac{1}{2} Z}$$

und daraus

$$\operatorname{ctg} \alpha - 1 = \frac{\cos \frac{1}{2} Y}{\cos \frac{1}{2} Z \cos 45}$$

Aus dem sphärischen Dreieck exz folgt

$$\cos ex = \sin ez \cos \alpha$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck efz folgt

$$\sin ez = \frac{\sin ef}{\sin \alpha}$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$\cos ex = \frac{\sin ef}{\sin \alpha} \cos \alpha = \sin ef \,.\, \operatorname{ctg} \alpha = \cos \tfrac{1}{2} Z \operatorname{ctg} \alpha.$$

Da $ey = 90 - ef = \frac{Z}{2}$ ist, so folgt

$$n = \frac{\cos ex}{\cos ey} = \frac{\cos \frac{1}{2} Z \operatorname{ctg} \alpha}{\cos \frac{1}{2} Z} = \operatorname{ctg} \alpha$$

Mithin ist

$$n - 1 = \frac{\cos \frac{1}{2} Y}{\cos \frac{1}{2} Z \cos 45}$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck exf folgt

$$\cos ex = \cos fx \sin \frac{1}{2} Z$$

Setzt man in diese Gleichung den für cos ex oben gefundenen Werth $\cos \frac{1}{2} Z \operatorname{ctg} \alpha$ so ergibt sich

$$\cos \frac{1}{2} Z \operatorname{ctg} \alpha = \cos fx \sin \frac{1}{2} Z$$

woraus

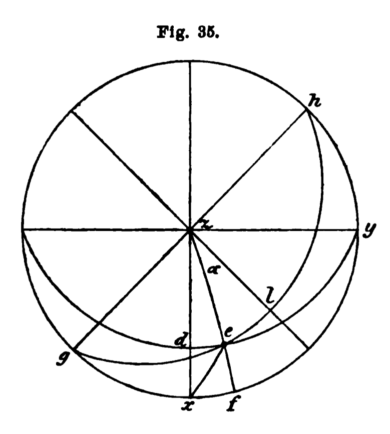
$$\cos fx = \operatorname{ctg} \frac{1}{2} Z \,.\, \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \frac{1}{2} Z \,.\, n$$

Da $mc = \dfrac{\cos ex}{\cos ez} = \dfrac{\cos fx \sin \frac{1}{2} Z}{\cos fz \sin \frac{1}{2} Z} = \dfrac{\cos fx}{\sin fx} = \operatorname{ctg} fx$ so hat man, um m und n zu finden, folgende Gleichungen zu berechnen

1) $n - 1 = \dfrac{\cos \frac{1}{2} Y}{\cos \frac{1}{2} Z \cos 45}$ $\quad \cos fx = n \operatorname{ctg} \frac{1}{2} Z \quad mc = \operatorname{ctg} fx$

b) Gegeben X und Z, gesucht die Indices der Fläche e.

Fig. 35.



In der Fig. 35 repräsentirt e wieder die ditetragonale Pyramidenfläche $1 \frac{1}{n} \frac{1}{m}$ und es ist $ed = 90 - \frac{1}{2} Z$ und $ef = 90 - \frac{1}{2} X$. Die Gleichung der Fläche e ist

$$\cos ex = n \cos ey = mc \cos ez$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck edz folgt

$$\cos ez = \cos zd \cos de$$

oder

$$\cos ez = \cos zd \sin \frac{1}{2} Z$$
$$= \sin dx \sin \frac{1}{2} Z$$

oder da $ez = 90 - ef = \frac{1}{2} X$ ist:

$$\sin dx = \frac{\cos \frac{1}{2} X}{\sin \frac{1}{2} Z}$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck exd folgt

$$\cos ex = \cos dx \sin \frac{1}{2} Z$$

Da $ey = 90 - ed = \frac{Z}{2}$ ist, so folgt

$$n = \frac{\cos ex}{\cos ey} = \frac{\cos dx \sin \frac{1}{2} Z}{\cos \frac{1}{2} Z} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} Z \cos dx$$

$$mc = \frac{\cos ex}{\cos ez} = \frac{\cos dx \sin \frac{1}{2} Z}{\sin dx \,.\, \sin \frac{1}{2} Z} = \frac{\cos dx}{\sin dx} = \operatorname{ctg} dx$$

Um daher m und n zu finden, hat man folgende Gleichungen zu berechnen

2) $\sin dx = \frac{\cos \frac{1}{2} X}{\sin \frac{1}{2} Z}$ $\quad n = \operatorname{tg} \frac{1}{2} Z \cos dx \quad$ $mc = \operatorname{ctg} dx$

c) Gegeben X und Y, gesucht die Indices der Fläche e.

In der Fig. 35 sei $ef = 90 - \frac{1}{2} X$ und $el = 90 - \frac{Y}{2}$

Aus dem rechtwinklig sphärischen Dreieck ezl folgt

$$\sin el = \sin \alpha \sin ez$$

woraus

$$\sin \alpha = \frac{\cos \frac{1}{2} Y}{\sin \frac{1}{2} X}$$

Aus dem sphärischen Dreieck exz folgt

$$\cos ex = \sin \bar{e}z \quad \cos (45 - \alpha)$$

Aus dem sphärischen Dreieck eyz folgt

$$\cos ey = \sin ez \quad \cos (45 + \alpha)$$

oder

$$\cos ex = \sin \frac{1}{2} X \cos (45 - \alpha)$$
$$\cos ey = \sin \frac{1}{2} X \cos (45 + \alpha)$$

Die Gleichung von e ist $\cos ex = n \cos ey = mc \cos ez$

$$n = \frac{\cos ex}{\cos ey} = \frac{\cos (45 - \alpha)}{\cos (45 + \alpha)} = \operatorname{tg} (45 + \alpha)$$

$$mc = \frac{\cos ex}{\cos ez} = \frac{\sin \frac{1}{2} X \cos (45 - \alpha)}{\cos \frac{1}{2} X} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} X \cos (45 - \alpha)$$

Um daher m und n zu finden, hat man folgende Gleichungen zu berechnen

$$3) \begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{\cos\frac{1}{2}Y}{\sin\frac{1}{2}X} \\ n = \operatorname{tg}(45+\alpha) \qquad mc = \operatorname{tg}\frac{1}{2}X \sin(45+\alpha) \end{cases}$$

Beispiel: Am Idokras ist $Y = 146^0\,20'$, $X = 80^0\,41'$ und $c = 0{,}537$.

$$\begin{aligned} \lg\cos\tfrac{1}{2}Y &= 9{,}4618 \\ E\lg\sin\tfrac{1}{2}X &= 0{,}1889 \\ \hline \lg\sin\alpha &= 9{,}6507 \\ \alpha &= 26^0\,35' \\ 45+\alpha &= 71^0\,35' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg n = \lg\operatorname{tg}(45+\alpha) &= 0{,}4775 \\ n &= 3 \\ \lg\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}X &= 9{,}9291 \\ \lg\sin(45+\alpha) &= 9{,}9772 \\ \hline \lg mc &= 9{,}9063 \\ mc &= 0{,}806 \end{aligned}$$

$$m = \frac{0{,}806}{c} = \frac{0{,}806}{0{,}537} = \frac{3}{2}$$

Die Indices der ditetragonalen Pyramidenfläche e sind daher $1\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{3}$ oder 3 1 2, die Formel der ditetragonalen Pyramide ist $\frac{3}{2}P3$

Berechnung der Protopyramiden mP.

Die zur Berechnung der Protopyramiden dienenden Gleichungen können wir aus den im Vorhergehenden entwickelten Gleichungen erhalten, wenn wir $Y = 180$, folglich $\frac{Y}{2} = 90^0$ setzen.

a) Gegeben die Polkante Z.

Setzen wir in den Gl. 1, S. 88 für $\frac{Y}{2}$ den Werth 90^0, so erhalten wir $n = 1$ und

$$1)\ \cos fx = \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}Z \qquad mc = \operatorname{ctg} fx$$

b) Gegeben die Randkante X.

Setzen wir in den Gl. 3, S. 90 $\frac{Y}{2} = 90$, so erhalten wir $\alpha = 0$ und

$$2)\ mc = tg\ \tfrac{1}{2} X \,.\, \sin 45$$

Berechnung der Deuteropyramiden $mP\infty$.

Der Polkantenwinkel wird jetzt durch Y, der Randkantenwinkel durch X bezeichnet.

a) Gegeben Y, gesucht die Indices der Fläche e.

In der Fig. 36 sei e die Projection der Deuteropyramidenfläche $1\ 0\ \frac{1}{m}$ oder $m\ 0\ 1$

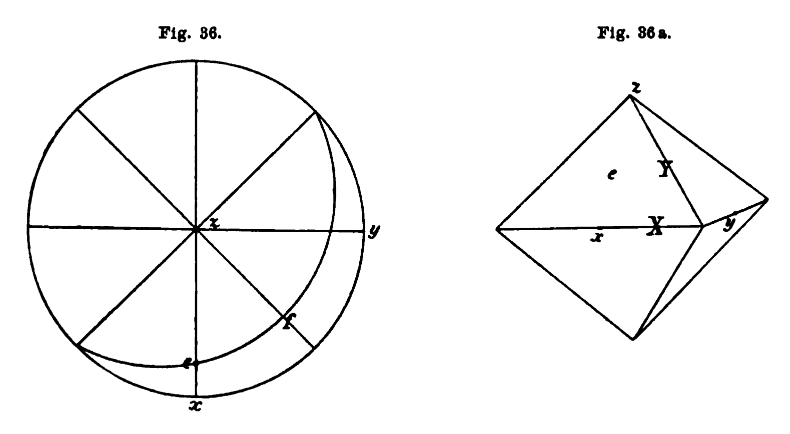


Fig. 36. Fig. 36a.

Die Gleichung der Fläche e ist

$$\cos ex = mc \cos ez$$

woraus

$$mc = \frac{\cos ex}{\cos ez} = \frac{\sin ez}{\cos ez} = tg\ ez$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck efz in welchem $ef = 90 - \frac{Y}{2}$ und $\sphericalangle\ ezf = 45^0$ ist, folgt

$$\sin ez = \frac{\cos \frac{1}{2} Y}{\sin 45}$$

Um daher m zu finden, berechne man

$$1)\ \sin ez = \frac{\cos \frac{1}{2} Y}{\sin 45} \qquad mc = \operatorname{tg} ez.$$

Es sei z. B. $\frac{Y}{2} = 50^0 54'$ und $c = 0{,}98525$.

$$\begin{array}{rl} \lg \cos \frac{1}{2} Y = 9{,}7997 & \lg \operatorname{tg} ez = 0{,}2944 \\ E\lg \sin 45 = 0{,}1505 & E\lg c = 0{,}0065 \\ \hline \lg \sin ez = 9{,}9502 & \lg m = 0{,}3009 \\ ez = 63^0\, 5' & m = 2 \end{array}$$

Die Indices der Deuteropyramidenfläche e sind daher $1\ 0\ \frac{1}{2}$ oder $2\ 0\ 1$. Die Formel der Deuteropyramide ist $2P\infty$

b) Gegeben X.

In der Fig. 36 ist $ex = 90 - \frac{X}{2}$. Daher, da

$$mc = \frac{\cos ex}{\cos ez} = \frac{\sin ez}{\cos ez} \text{ ist,}$$

$$2)\ mc = \operatorname{tg} ez = \operatorname{ctg} ex = \operatorname{tg} \frac{X}{2}$$

Berechnung der ditetragonalen Prismen ∞Pn.

Aus den Formeln, die für die ditetragonalen Pyramiden entwickelt worden sind, erhalten wir die für die ditetragonalen Prismen gültigen Gleichungen, indem wir dort $X = 180^0$ setzen.

a) Gegeben Z.

Setzen wir in den Gl. 2, S. 89 $\frac{X}{2} = 90$, so ist $\sin dx = 0$, mithin $dx = 0$, folglich

$$1)\ n = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} Z$$

b) Gegeben Y.

Setzen wir in den Gl. 3, S. 90 $\frac{X}{2} = 90$, so wird

$\sin \alpha = \cos \frac{1}{2} Y$, mithin $\alpha = 90 - \frac{1}{2} Y$ und folglich:

$$2)\ n = \operatorname{tg} (135 - \tfrac{1}{2} Y)$$

Berechnung der hemiëdrischen Körper.

§. 11.

Berechnung der Skalenoëder $\pm \frac{mPn}{2}$

In der Fig. 37 repräsentirt e die tetragonale Skalenoëderfläche $1 \frac{1}{n} \frac{1}{m}$. Die Gleichung der Fläche e ist

$$\cos ex = n \cos ey = mc \cos ez$$

woraus

$$n = \frac{\cos ex}{\cos ey} \qquad mc = \frac{\cos ex}{\cos ez} = \frac{n \cos ey}{\cos ez}$$

Fig. 37.

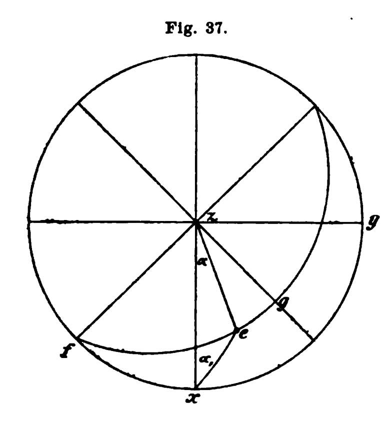
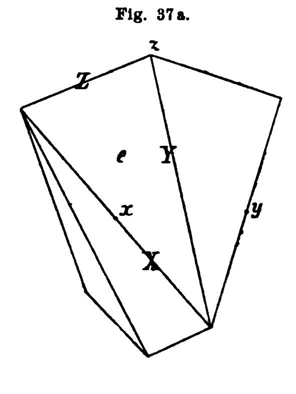


Fig. 37 a.



Wir haben drei Fälle zu unterscheiden.

a) Gegeben X und Y, gesucht die Indices der Fläche e.

Es sei in der Fig. 37 $ex = 90 - \frac{X}{2}$ und $eg = 90 - \frac{Y}{2}$

Aus dem sphärischen Dreieck exz folgt

$$\text{d)} \quad \cos ex = \sin ez \cos \alpha$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ezg folgt

$$\sin eg = \sin ez \sin (45 - \alpha)$$

Aus beiden Gleichungen erhält man durch Division

$$\frac{\sin(45 - \alpha)}{\cos\alpha} = \frac{\cos\frac{1}{2}Y}{\sin\frac{1}{2}X}$$

und daraus folgt

$$\text{e)}\ 1 - \operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\frac{1}{2}Y}{\sin\frac{1}{2}X\cos 45}$$

Aus dem Dreieck eyz folgt

$\cos ey = \sin ez \cos(90 - \alpha) = \sin ez \sin\alpha$ oder für $\sin ez$ den Werth aus der Gl. d substituirt:

$$\cos ey = \frac{\cos ex}{\cos\alpha}\sin\alpha = \sin\frac{X}{2}\operatorname{tg}\alpha$$

Nun ist

$$\text{f)}\ n = \frac{\cos ex}{\cos ey} = \frac{\sin\frac{1}{2}X}{\sin\frac{1}{2}X\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$$

Setzt man diesen Werth für $\operatorname{ctg}\alpha$ in die Gl. e, so ergibt sich

$$\text{g)}\ 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \frac{\cos\frac{1}{2}Y}{\sin\frac{1}{2}X\cos 45}$$

Aus dem sphärischen Dreieck exf, in welchem $fx = 45$ $fe = 90 - eg = \frac{Y}{2}$ und $ex = 90 - \frac{X}{2}$ und $\sphericalangle fxe = 90 + \alpha$, ist, folgt

$$\cos ef = \cos ex \cos 45 - \sin ex \sin 45 \sin\alpha,$$

oder

$$\frac{\cos\frac{Y}{2}}{\cos 45} = \sin\frac{X}{2} - \cos\frac{X}{2}\sin\alpha,$$

Setzt man für $\frac{\cos\frac{Y}{2}}{\cos 45}$ den aus Gl. g folgenden Werth, so ergibt sich

$$\frac{n-1}{n}\sin\frac{X}{2} = \sin\frac{X}{2} - \cos\frac{X}{2}\sin\alpha,$$

woraus

$$\frac{n-1}{n} = 1 - \operatorname{ctg} \frac{X}{2} \sin \alpha.$$

$$h) \quad \sin \alpha, = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} X}{n}$$

Nun ist

$$mc = \frac{n \cos ey}{\cos ez} = \frac{n \sin \frac{1}{2} X \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\cos ez}$$

Vermöge der Gl. f ist $n \operatorname{tg} \alpha = 1$. Aus dem Dreieck $e \alpha x$ folgt $\cos ez = \sin ex \cos \alpha$, Dies substituirt gibt

$$mc = \frac{\sin \frac{1}{2} X}{\sin ex \cos \alpha,} = \frac{\sin \frac{1}{2} X}{\cos \frac{1}{2} X \cos \alpha,} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} X \cdot \frac{1}{\cos \alpha,}$$

Setzt man für $\operatorname{tg} \frac{1}{2} X$ den aus Gl. h folgenden Werth, so ergibt sich

$$mc = n \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

Um m und n zu finden, hat man mithin zu berechnen

$$a) \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} = \dfrac{\cos \frac{1}{2} Y}{\sin \frac{1}{2} X \cdot \cos 45} \\ \sin \alpha, = \dfrac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{2} X \qquad \dfrac{mc}{n} = \operatorname{tg} \alpha, \end{cases}$$

b) Gegeben X und Z, gesucht die Indices der Fläche e.

In der Fig. 38 sei e die Projection der tetragonalen Skalenoëderfläche $1 \frac{1}{n} \frac{1}{m}$. Die Gleichung der Fläche e ist:

$$\cos ex = n \cos ey = mc \cos ez$$

Es sei in der Fig. 38:

$$ex = 90 - \frac{X}{2}$$

und

$$ef = 90 - \frac{Z}{2}$$

Fig. 38.

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck efz folgt

$$\sin ef = \sin (45 + \alpha) \sin ez$$

Aus dem sphärischen Dreieck exz folgt

$$\cos ex = \cos \alpha \,.\, \sin ez$$

Durch Division beider Gleichungen ergibt sich:

$$\frac{\sin (45 + \alpha)}{\cos \alpha} = \frac{\cos \frac{1}{2} Z}{\sin \frac{1}{2} X}$$

und daraus folgt

$$\text{d)} \quad 1 + \operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \frac{1}{2} Z}{\sin \frac{1}{2} X \cos 45}$$

Aus dem Dreieck eyz folgt

$$\cos ey = \sin ez \sin \alpha$$

$$\cos ey = \frac{\cos ex}{\cos \alpha} \sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cos ex$$

$$\text{e)} \quad n = \frac{\cos ex}{\cos ey} = \frac{\cos ex}{\operatorname{tg} \alpha \cos ex} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Setzt man diesen Werth für tg α in die Gl. d, so ergibt sich

$$\text{f)} \quad 1 + \frac{1}{n} = \frac{\cos \frac{1}{2} Z}{\sin \frac{1}{2} X \cos 45}$$

Aus dem sphärischen Dreieck ehx, in welchem

$$eh = 90 - ef = \frac{Z}{2} \text{ und } xh = 45 \text{ ist, folgt}$$

$$\cos \frac{Z}{2} = \cos 45 \cos ex + \sin 45 \sin ex \sin \alpha,$$

woraus

$$\frac{\cos \frac{Z}{2}}{\cos 45} = \sin \frac{X}{2} + \cos \frac{X}{2} \sin \alpha,$$

Setzt man diesen Werth für $\frac{\cos \frac{Z}{2}}{\cos 45}$ in Gl. f, so ergibt sich

$$\frac{n+1}{n} \sin \tfrac{1}{2} X = \sin \tfrac{1}{2} X + \cos \frac{X}{2} \sin \alpha,$$

woraus

$$\text{g)} \quad \sin \alpha, = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} X}{n}$$

Nun ist

$$mc = \frac{n \cos ey}{\cos ez} = \frac{n \operatorname{tg} \alpha \sin \frac{1}{2} X}{\cos \frac{1}{2} X \cos \alpha,}$$

Da vermöge Gl. e: $n \operatorname{tg} \alpha = 1$ ist, so folgt

$$mc = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} X}{\cos \alpha,}$$

Da vermöge Gl. g: $\operatorname{tg} \frac{1}{2} X = n \sin \alpha,$ ist. so folgt

$$mc = n \operatorname{tg} \alpha,$$

Um daher m und n zu finden, hat man folgende Gleichungen zu berechnen

$$2) \left| \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{n} = \frac{\cos \frac{1}{2} Z}{\sin \frac{1}{2} X \cos 45} \\ \sin \alpha, = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} X}{n} \qquad mc = n \operatorname{tg} \alpha, \end{array} \right.$$

c) **Gegeben Y und Z, gesucht die Indices der Fläche e.**

In der Fig. 38 sei e die Projection der tetragonalen Skalenoëderfläche $1 \frac{1}{n} \frac{1}{m}$. Die Gleichung der Fläche e ist alsdann:

$$\cos ex = n \cos ey = mc \cos ez$$

Auf der Linie zh zeichne man den Punkt k so, dass gek tautozonal sind. Dann ist $ek = 90 - \frac{Y}{2}$ und $ef = 90 - \frac{Z}{2}$

Aus dem sphärischen Dreieck egz folgt

$$\cos eg = \sin ez \sin \beta \text{ wenn } \beta = ezh \text{ ist.}$$

Aus dem sphärischen Dreieck ehz folgt

$$\cos eh = \sin ez \cos \beta$$

Durch Division folgt

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\cos \frac{1}{2} Y}{\cos \frac{1}{2} Z}$$

Aus dem sphärischen Dreieck eyz folgt

$$\cos ey = \sin ez \cos (45 + \beta)$$

Aus dem sphärischen Dreieck exz folgt

$$\cos ex = \sin ez \cos (45 - \beta)$$

Aus beiden Gleichungen folgt durch Division

$$n = \frac{\cos ex}{\cos ey} = \frac{\cos (45 - \beta)}{\cos (45 - \beta)} = \operatorname{tg} (45 - \beta)$$

Aus dem sphärischen Dreieck e h k folgt

$$\cos eh = \cos ek \cos kh$$

und daraus ergibt sich

$$\cos kh = \frac{\cos \frac{1}{2} Z}{\sin \frac{1}{2} Y}$$

Nun ist

$$mc = \frac{n \cos ey}{\cos ez} = \frac{n \sin ez \cos (45 + \beta)}{\cos ez} = tg\, ez \sin (45 + \beta)$$

oder

$$mc = \cos 45\, tg\, ez \cos \beta\, (1 + tg\, \beta)$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck e z k folgt

$$\cos \beta = ctg\, ez\, tg\, zk = ctg\, ez\, ctg\, kh$$

Dies substituirt gibt

$$mc = \cos 45 \,.\, ctg\, kh\, (1 + tg\, \beta)$$

Nun ist

$$n = tg\,(45 + \beta) = \frac{1 + tg\, \beta}{1 - tg\, \beta}$$

$$n + 1 = \frac{2}{1 - tg\, \beta}$$

Mithin

$$mc = n\,(1 - tg\, \beta) \cos 45\, ctg\, kh = \cos 45\, ctg\, kh \,.\, \frac{n \,.\, 2}{n + 1}$$

$$mc = \frac{n}{n + 1} \frac{ctg\, kh}{\cos 45}$$

Um daher m und n zu finden, hat man folgende Gleichungen zu berechnen:

$$3) \left\{ \begin{array}{ll} tg\, \beta = \dfrac{\cos \frac{1}{2} Y}{\cos \frac{1}{2} Z} & n = tg\,(45 + \beta), \\ \cos kh = \dfrac{\cos \frac{1}{2} Z}{\sin \frac{1}{2} Y} & mc = \dfrac{n}{n + 1} \dfrac{ctg\, kh}{\cos 45} \end{array} \right.$$

Berechnung der Sphenoide $\frac{mP}{2}$.

a) Gegeben X, gesucht m.

Setzen wir in den Gl. 1, S. 95 $\frac{Y}{2} = 90$, so ergibt sich

$$1)\ \sin \alpha = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} X \qquad mc = \operatorname{tg} \alpha$$

b) Gegeben Z, gesucht m.

Setzen wir in den Gl. 3, S. 98 $\frac{Y}{2} = 90$, so ergibt sich

$$2)\ mc = \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} Z \,.\, \cos 45$$

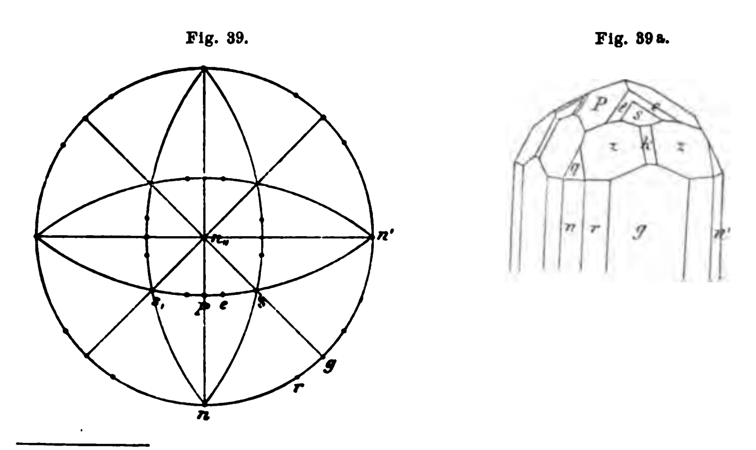
§. 12.

Berechnung complicirter Combinationen.

Erstes Beispiel (Zinnstein) [1].

Die Fig. 39a gibt eine parallelperspectivische Abbildung, die Fig. 39 eine stereographische Projection derjenigen Flächen, die sich nicht unmittelbar aus dem Zonenverband ergeben.

Fig. 39. Fig. 39a.



[1]) Vergl. Naumann, Lehrbuch der reinen und angewandten Krystallographie, 1830, Bd. 1, S. 340, Fig. 348.

Wir wählen s zur Grundgestalt.

Eine allgemeine Bestimmung lehrt, dass

s die Protopyramide P
k eine Pyramide m P
g das Prisma ∞ P
P und q Deuteropyramiden m P ∞
n das Deuteroprisma ∞ P ∞
e und z ditetragonale Pyramiden m P n
r ein ditetragonales Prisma ∞ P n

Man kennt den Winkel Z der Polkante der Pyramide s. Er ist $= 121^0 40'$. Man kennt ferner die beiden Polkanten der Pyramide z und zwar

$$Y = 159^0 5' \text{ und } Z = 118^0 10'$$

Ferner kennt man die Winkel $n : r = 146^0 19'$ (Fig. 39a)
und $P : e = 169^0 30'$

Aus den Gl. 1, S. 90: $\cos fx = \text{ctg} \frac{1}{2} Z$, $m c = \text{ctg } f x$ folgt für die Protopyramide, in welcher $m = 1$ ist,

$$c = 0{,}6721$$

Berechnung von z.

Aus den Gl. 1, S. 88:

$$n - 1 = \frac{\cos \frac{1}{2} Y}{\cos \frac{1}{2} Z \cos 45} \quad \cos fx = n \,\text{ctg} \frac{1}{2} Z \quad m c = \text{ctg } fx$$

folgt

$m = 3{,}03 = 3$ annähernd und $n - 1 = 0{,}4997 = 0{,}5$ annähernd,

mithin $n = \frac{3}{2}$, folglich ist

$$z = 3 P \frac{3}{2} \text{ oder } (3\,2\,1)$$

Berechnung von P.

P ergibt sich aus der Zone s P s, (Fig. 39)

$$P = P \infty \text{ oder } (101)$$

Berechnung von e.

Erste Methode. e liegt in der Zone s e P (Fig. 39 und Fig. 39a). Die Indices von e seien $1 \frac{1}{n} \frac{1}{m}$, so muss, weil

es in der Zone s e P liegt, vermöge der Zonengleichung sein: $m = 1$. Die Indices von e sind mithin: $1\ \frac{1}{n}\ 1$. Die Gleichung von e ist:

$$\cos en = n \cos en' = c \cos en''$$

$$n = \frac{\cos en}{\cos en'} = \frac{\cos en}{\sin Pe} \text{ (Fig. 39).}$$

Die Indices von P sind 1 0 1, folglich ist die Gleichung von P:

$$\cos Pn = c \cos Pn'' = c \sin Pn \text{ (Fig. 39)}$$

$$\operatorname{ctg} Pn = c. \text{ Daraus folgt}$$

$$Pn = 56^\circ 5' 30''$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck P e n folgt:

$$\cos en = \cos Pn \cos Pe, \text{ mithin}$$

$$n = \frac{\cos Pn \cos Pe}{\sin Pe} = \cos Pn \operatorname{ctg} Pe$$

$$n = 3{,}018 = 3 \text{ annähernd.}$$

Mithin ist

$$e = P_3 \text{ oder } (3\,1\,3)$$

Zweite Methode. Setzt man in der Gl. 15, S. 26 für h k l die Indices von e : $1\ \frac{1}{n}\ 1$ und für h′ k′ l′ die Indices von P: 1 0 1, so erhält man

$$\cos Pe = \frac{n\sqrt{c^2+1}}{\sqrt{n^2(1+c^2)+c^2}}, \text{ woraus } \operatorname{ctg} Pe = \frac{n\sqrt{c^2+1}}{c}$$

und hieraus

$$n = \frac{c \operatorname{ctg} Pe}{\sqrt{c^2+1}}$$

Berechnung von r.

Die Indices von r seien: $1\ \frac{1}{n}\ o$, so ist die Gleichung von r:

$\cos rn = n \cos rn' = n \sin rn$ (Fig. 39), woraus

$$n = \text{ctg } rn = 1{,}501 = \frac{3}{2} \text{ annähernd.}$$

Mithin ist

$$r = \infty P \tfrac{3}{2} \text{ oder } (3\,2\,0)$$

Berechnung von k.

k liegt in der Zone zkz (Fig. 39a). Daher ergibt sich vermöge der Zonengleichung 4:

$$k = \tfrac{5}{2} P$$

Berechnung von q.

q liegt in der Zone qzk (Fig. 39a). Daher findet sich vermöge der Zonengleichung 4:

$$q = 5 P \infty .$$

Die Combination weist mithin folgende Formen auf:

∞P	. $\infty P \frac{3}{2}$	. $\infty P \infty$	. $3 P \frac{3}{2}$	. P	. $P \infty$	. $5 P \infty$
g	. r	. n	. z	. s	. P	. q
(110)	. (320)	. (100)	. (321)	. (111)	. (101)	. (501)

. $\frac{5}{2}$ P	. P_3
. k	. e
. (552)	. (313)

Zweites Beispiel (Kupferkies von Ramberg bei Daaden)[1].

Die Fig. 40a gibt eine parallelperspectivische, die Fig. 40 eine stereographische Projection des Kupferkieses von Ramberg.

Eine allgemeine Bestimmung lehrt, dass, wenn wir S zur Grundform wählen,

a das basische Pinakoid oP

S das Sphenoid $+ \frac{P}{2}$

s′ das Sphenoid $- \frac{P}{2}$

[1]) Vergl. Sadebeck, Ueber die Krystallformen des Kupferkieses. Zeitschr. der deutschen geolog. Gesellsch. 1868, Taf. 14, Fig. 18; vergl. auch Klein, Einleitung in die Krystallberechnung, Stuttgart 1876, S. 178, Taf. V, Fig. 5.

c eine Deuteropyramide $mP\infty$

y ein Skalenoëder $+\frac{mPn}{2}$

Fig. 40.

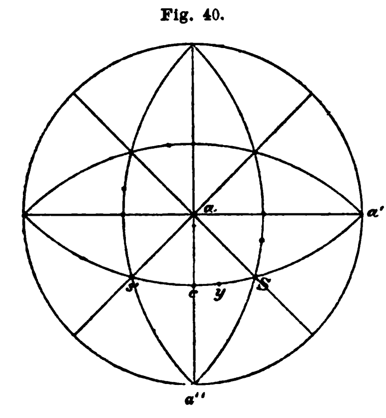
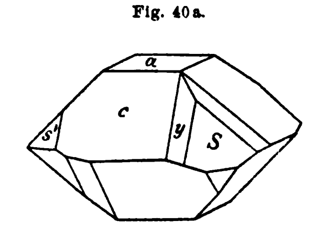


Fig. 40a.



Bekannt ist der Randkantenwinkel X von Ss' (Fig. 40a). Er ist $= 108^0 40'$

$c : y = 166^0 50'$ (Fig. 40a).

Um das Axenverhältniss zu finden, setzen wir in Gl. 2, S. 91 für m den Werth 1 und für X den Werth $108^0 40'$ und erhalten

$$c = 0{,}9853$$

Bestimmung von c.

c liegt in der Zone Scs' (Fig. 40). Folglich ergibt sich vermöge der Zonengleichung 4:

$$c = P\infty \text{ oder } (1\,0\,1)$$

Bestimmung von y.

Die Indices von y seien $1 \frac{1}{n} \frac{1}{m}$. Weil y in der Zone Syc (Fig. 40) liegt, muss vermöge der Zonengleichung $m = 1$ sein. Die Indices von y sind mithin $1 \frac{1}{n} 1$. Die Gleichung von y ist:

$$\cos ya'' = n \cos ya' = c \cos ya$$

$$n = \frac{\cos ya''}{\cos ya'} = \frac{\cos ya''}{\sin cy}$$

Die Gleichung von c ist $\cos ca_{,,} = c \cos ca = c \sin ca_{,,}$ woraus $\operatorname{ctg} ca_{,,} = c$ und hieraus

$$ca_{,,} = 45^{0}25'$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck $c y a''$ folgt

$$\cos ya_{,,} = \cos cy \cos ca_{,,} \text{ mithin}$$

$$n = \operatorname{ctg} cy \cos ca_{,,} = 3. \text{ Daher}$$

$$y = + \frac{P_3}{2} \text{ oder } \varkappa\ (3\,1\,3)$$

Die Combination weist mithin auf:

$$+\frac{P}{2} \;.\; -\frac{P}{2} \;.\; oP \;.\; P\infty \;.\; +\frac{P_3}{2}$$

$$S \;.\; s' \;.\; a \;.\; c \;.\; y$$

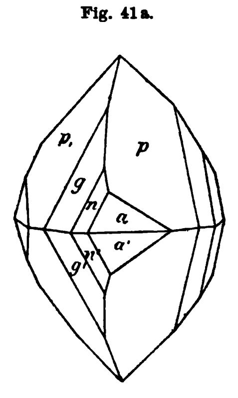
$$\varkappa\,(1\,1\,1) \;.\; \varkappa\,(1\,\bar{1}\,1) \;.\; (0\,0\,1) \;.\; (1\,0\,1) \;.\; \varkappa\,(3\,1\,3)$$

Drittes Beispiel (Scheelit) [1]).

Fig. 41a repräsentirt eine Combination des Scheelits; Fig. 41 ist die stereographische Projection, soweit sie zur Berechnung nothwendig ist. An den horizontalen Randkanten

Fig. 41.

Fig. 41a.



sehen wir, dass nur Pyramiden vorliegen. Wir wählen p zur Grundform, dann ist

[1]) Levy, Descr. d'une collection etc., 1838, T. III, p. 369, Pl. 80, Fig. 4.

p die Pyramide P
n eine Deuteropyramide $mP\infty$
a eine Tritopyramide $\frac{mPn}{2}\ \frac{r}{l}$
g eine Tritopyramide $\frac{mPn}{2}\ \frac{l}{r}$

Bekannt sind die Winkel $n:n' = 130^\circ 33'$ (Fig. 41 a)
$a:n = 151^\circ 39'$ $g:n = 162^\circ 46'$ (Fig. 41 a)

Berechnung von n.

Die Fläche n liegt in der Zone npn' (Fig. 41), daher ergeben sich die Indices von n vermöge der Gl. 4, S. 8: 2 0 1. Mithin

$$n = 2P\infty \text{ oder } (201)$$

Aus Gl. 2, Seite 92: $mc = \operatorname{tg}\frac{X}{2}$ folgt nun

$$c = \frac{\operatorname{tg}\frac{X}{2}}{m} = \frac{\operatorname{tg}\frac{130^\circ 33'}{2}}{2} = 1{,}0858$$

Berechnung von a.

Erste Methode. Die Fläche a liegt in der Zone anp, (Fig. 41). Sind die Indices von a: $1\ \frac{1}{n}\ \frac{1}{m}$, so findet man vermöge der Zonengleichung $n = \frac{m}{m-2}$. Die Indices von a sind mithin $1\ \frac{m-2}{m}\ \frac{1}{m}$.

Die Gleichung von a ist

$$\cos ax = \frac{m}{m-2}\cos ay = mc\cos az \text{ woraus}$$

$$\frac{m-2}{m} = \frac{\cos ay}{\cos ax}$$

Die Gleichung von n ist $\frac{1}{2}\cos nx = c\cos nz$ woraus (s. Fig. 41)

$$\operatorname{ctg} nz = \frac{1}{2c}, \text{ mithin } nz = 65^\circ 17'$$

Aus dem sphärischen Dreieck nzb folgt (Fig. 41)

$$\cos nb = \sin nz \cos 45$$

$$nb = 50^\circ 2', \text{ mithin } ab = nb - na = 21^\circ 41'$$

Aus den sphärischen Dreiecken abx und aby folgt

$$\cos ax = \cos ab \cos 45 + \sin ab \sin 45 \cos abx$$

$$\cos ay = \cos ab \cos 45 + \sin ab \sin 45 \cos aby$$

$$\cos ay = \cos ab \cos 45 - \sin ab \sin 45 \cos abx$$

Nun ist $abx = b_, p_,$ mithin folgt durch Division:

$$\frac{\cos ay}{\cos ax} = \frac{1 - \operatorname{tg} ab \cos b_, p_,}{1 + \operatorname{tg} ab \cos b_, p_,} = \frac{m-2}{m}$$

Um $b_, p_,$ zu finden, wenden wir die Gl. 15, S. 26 an

$$\cos b_, p_, = \frac{ll' + c^2 (kk' + hh')}{\sqrt{l^2 + c^2 (h^2 + k^2)} \sqrt{l'^2 + c^2 (h'^2 + k'^2)}}$$

indem wir für $p_,$ die Indices $1\bar{1}1$, für $b_,$ die Indices $1\bar{1}0$ setzen. Wir erhalten

$$b_, p_, = 33^\circ 4'$$

Setzen wir nun in der obigen Gleichung

$$\operatorname{tg} ab \cos b_, p_, = \operatorname{tg} \varphi \text{ so ist}$$

$$\frac{m-2}{m} = \operatorname{tg} (45 - \varphi). \text{ Daraus ergibt sich}$$

$$\varphi = 18^\circ 26'$$

$$m = 4 \text{ folglich } n = \frac{m}{m-2} = 2$$

Mithin ist

$$a = \frac{{}_4P_2}{2} \frac{r}{l} \text{ oder } \pi\ (4\,2\,1)$$

Zweite Methode. Setzt man in die Gl. 15:

$$\cos na = \frac{ll' + c^2 (kk' + hh')}{\sqrt{l^2 + c^2 (h^2 + k^2)} \sqrt{l'^2 + c^2 (h'^2 + k'^2)}}$$

für n die Indices $2\,0\,1$, für a die Indices $1\ \frac{1}{n}\ \frac{n-1}{2n}$, so erhält man

$$\cos na = \frac{n (4c^2 + 1) - 1}{\sqrt{4c^2 + 1} \sqrt{(n^2 + 1)(4c^2 + 1) - 2n}}$$

woraus

$$\operatorname{ctg} n\,a = \frac{n\,(4c^2 + 1) - 1}{2c\sqrt{2\,(1 + 2c^2)}}$$

woraus

$$n = \frac{1 + 2c \operatorname{ctg} n\,a \sqrt{2\,(1 + 2c^2)}}{4c^2 + 1} = 2$$

Berechnung von g.

Erste Methode. Die Indices von g seien: $1 \frac{\bar{1}}{n} \frac{1}{m}$

g liegt in der Zone n g p, mithin ist $\frac{1}{n} = \frac{2 - m}{m}$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck g z p, folgt

$$\cos g z p, = \operatorname{ctg} g z \operatorname{tg} p,z \text{ und}$$

$$\cos g z = \cos g p, \cos z p,$$

Da z p, = 90 — b, p, und g p, = b p, — b g = 90 — (n b + g n) ist, so folgt

$$g z = 59^0 47' \text{ und } g z p, = \alpha = 26^0 33'$$

Die Indices von g sind: $1 \frac{m - 2}{m} \frac{1}{m}$. Die Gleichung von g ist daher

$$\cos g x = \frac{m}{m - 2} \cos g y = m c \cos g z$$

$$\frac{m - 2}{m} = \frac{\cos g y}{\cos g x} = - \frac{\cos g v}{\cos g x}$$

Aus den rechtwinkligen sphärischen Dreiecken g x z' und g v z' folgt, wenn b, z z' = α ist,

$\cos g v = \cos g z' \cos (45 + \alpha)$

$\cos g x = \cos g z' \cos (45 - \alpha)$

hieraus

$$\frac{\cos g v}{\cos g x} = \frac{\cos (45 + \alpha)}{\cos (45 - \alpha)} = \frac{\sin (45 - \alpha)}{\cos (45 - \alpha)} = \operatorname{tg} (45 - \alpha) = 0{,}333.. = \frac{1}{3}$$

Mithin

$$\frac{2 - m}{m} = \frac{1}{3}, \text{ folglich } m = \frac{3}{2} \text{ und } n = 3$$

$$g = \frac{\frac{3}{2} P_3}{2} \frac{1}{r} \text{ oder } \pi \ (3\,\bar{1}\,2)$$

Zweite Methode. Setzt man in die Gleichung

$$\cos gn = \frac{ll' + c^2 (kk' + hh')}{\sqrt{l^2 + c^2 (h^2 + k^2)}\sqrt{l'^2 + c^2 (h'^2 + k'^2)}}$$

für g die Indices $1 \frac{\bar{1}}{n} \frac{n+1}{2n}$ und für n die Indices 201, so erhält man:

$$\cos gn = \frac{n (4c^2 + 1) + 1}{\sqrt{(4c^2 + 1)}\sqrt{(n^2 + 1)(4c^2 + 1) + 2n}}$$

woraus

$$\operatorname{ctg} gn = \frac{n (4c^2 + 1) + 1}{2c\sqrt{2 (1 + 2c^2)}}$$

und hieraus

$$n = \frac{2c\sqrt{2 (1 + 2c^2)} \cdot \operatorname{ctg} gn - 1}{4c^2 + 1} = 3$$

Die Combination weist mithin auf:

$$\begin{array}{ccccccc} P & . & 2P\infty & . & \frac{4P2}{2}\frac{r}{1} & . & \frac{\frac{3}{2}P3}{2}\frac{1}{r} \\ p & . & n & . & a & . & g \\ (111) & . & (201) & . & \pi(421) & . & \pi(3\bar{1}2) \end{array}$$

Aufgabe. Entwickele die Combination, wenn n zur Grundpyramide gewählt wird.

Resultat:

$$\begin{array}{ccccc} P . P\infty & . & \frac{3P3}{2}\frac{r}{1} & . & \frac{P2}{2}\frac{1}{r} \\ n . p & . & a & . & g \end{array}$$

Viertes Beispiel (Anatas vom Binnenthal) [1]).

Die Fig. 42a repräsentirt eine Combination des Anatas vom Binnenthal. Die Fig. 42 gibt eine stereographische Projection der Flächen, die durch Rechnung gefunden werden müssen. Lassen wir die Nebenaxe durch a gehen und gehen von $\underline{e}$ als P ∞ aus, so ist (Fig. 42a)

---

[1]) Vergl. die Mittheilungen von Klein im Jahrb. für Mineralogie, 1875, S. 337, Taf. XI, Fig. 4 und auch Einleitung in die Krystallberechnung von Klein, Stuttgart 1876, S. 174, Taf. 5, Fig. 3.

$\underline{e}$ die Deuteropyramide P ∞
a das Deuteroprisma ∞ P ∞
$\underline{m}$ das Prisma ∞ P
d, f, p, h, k und v sind Pyramiden mP
n ist eine ditetragonale Pyramide mPn

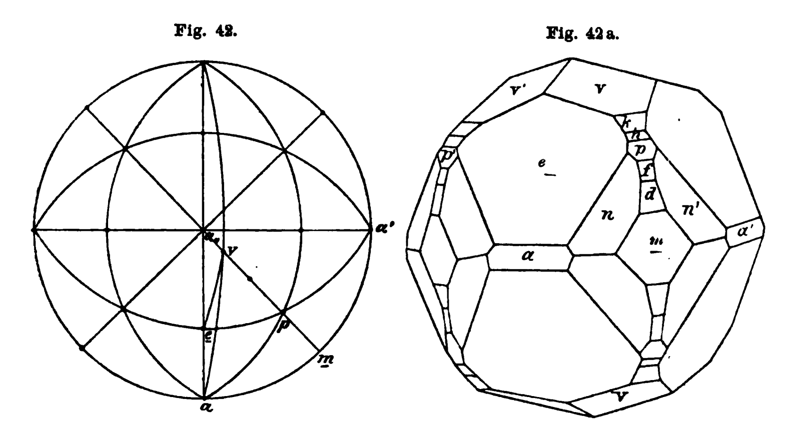


Fig. 42. Fig. 42 a.

Bekannt ist der Randkantenwinkel von $\underline{e}$: 121° 16′ (Fig. 42 a).
Bekannt sind ferner die Winkel

$\underline{m}$: d = 172° 26′	$\underline{m}$: k = 141° 29′
$\underline{m}$: f = 118° 45′	$\underline{m}$: z = 129° 57′
$\underline{m}$: p = 158° 18′	v : $\underline{e}$ = 132° 3′

Aus Gl. 2, S. 92 folgt für m = 1 der Werth $c = \operatorname{tg} \frac{X}{2}$.
Da X = 121° 16′ ist, so folgt

$$c = 1{,}7771$$

Bestimmung der Pyramide p.

Die Indices von p seien m m 1, so ist die Gleichung von p

$$\frac{\cos pa}{m} = \frac{\cos pa_{,}}{m} = c \cos pa_{,,}$$

woraus, da $pa = pa_{,}$ ist, folgt

$$m = \frac{\cos pa}{c \cos pa_{,,}}$$

Nun folgt (s. Fig. 42) aus dem Dreieck $p\underline{m}a$:

$$\cos pa = \cos p\underline{m} \cos 45$$

mithin, da $pa_{,,} = 90 - p\underline{m}$ ist,

$$m = \frac{\operatorname{ctg} p\underline{m} \cos 45}{c}$$

Nun ist $p\underline{m} = 180 - p : \underline{m} = 21^{\circ}42'$. Setzt man diesen Werth in die vorstehende Gleichung, so erhält man $m = 1$, mithin ist

$$p = P \text{ oder } (1\,1\,1).$$

Dieselbe Gleichung dient auch zur Berechnung der Pyramiden d, f, h, k. Man findet

$$d = 3P \text{ oder } (3\,3\,1) \qquad h = \tfrac{1}{2}P \text{ oder } (1\,1\,2)$$
$$f = 2P \text{ oder } (2\,2\,1) \qquad k = \tfrac{1}{3}P \text{ oder } (1\,1\,3)$$

Nun ergibt sich auch vermöge der Zonengleichung, dass die Flächen $p\underline{e}p'$ (Fig. 42 a) tautozonal sind.

Vermöge der Gl. 15, S. 26 erhält man ebenfalls

$$m = \frac{\operatorname{ctg} p\underline{m} \cos 45}{c}$$

Berechnung von v (s. Fig. 42).

Erste Methode. Um v zu berechnen, müssen wir zunächst aus der Gleichung von e:

$\cos \underline{e}a = c \cos \underline{e}a_{,,}$ oder $\sin \underline{e}a_{,,} = c \cos ea_{,,}$ oder $\operatorname{tg} \underline{e}a_{,,} = c$

den Winkel $\underline{e}a_{,,}$ berechnen. Wir finden

$$\underline{e}a_{,,} = 60^{0}\,30'.\,30''$$

Die Indices von v seien m m 1, so ist die Gleichung von v

$$\frac{\cos va}{m} = c \cos va_{,,}$$

mithin

$$m = \frac{\cos va}{c \cos va_{,,}}$$

Aus dem sphärischen Dreieck $\underline{e}va_{,,}$ folgt

$$\cos \underline{e}v = \cos \underline{e}a_{,,} \cos a_{,,}v + \sin \underline{e}a_{,,} \sin a_{,,}v \cos 45$$

Setzt man in dieser Gleichung

$$\text{a)}\ \operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{tg} \underline{e}\,a_{,,} \cos 45 = c \cos 45$$

so ist

$$\text{b)}\ \sin(\varphi - v\,a_{,,}) = \frac{\cos v\,\underline{e} \sin \varphi}{\cos \underline{e}\,a_{,,}}$$

Aus dem Dreieck $a\,v\,a_{,,}$ ergibt sich $\cos v\,a = \sin v\,a_{,,} \cos 45$ mithin

$$\text{c)}\ m = \operatorname{tg} v\,a_{,,} \cdot \frac{\cos 45}{c}$$

Da $v\,\underline{e} = 180 - v : \underline{e} = 47^{0}\,57'$ ist, so ergibt sich

$$\varphi = 38^{0}\,39' \text{ und } v\,a_{,,} = 19^{0}\,33'$$

folglich $m = 0{,}1413 = \frac{1}{7}$ annähernd. Es ist folglich

$$v = \tfrac{1}{7} P \text{ oder } (1\,1\,7).$$

Zweite Methode. Setzt man in Gl. 15, S. 26 für $h\,k\,l$ die Indices von v: $m\,m\,1$ und für $h'\,k'\,l'$ die Indices von e: $1\,0\,1$, so erhält man, wenn $\underline{e}\,v = w$ gesetzt wird,

$$\cos w = \frac{m\,c^2 + 1}{\sqrt{c^2 + 1}\,\sqrt{2\,m^2\,c^2 + 1}}$$

Daraus folgt

$$+\sqrt{c^2 + 1} \cos w = \frac{m\,c^2}{\sqrt{2\,m^2\,c^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{2\,m^2\,c^2 + 1}}$$

Setzt man

$$\frac{1}{\sqrt{2\,m^2\,c^2 + 1}} = \cos \alpha, \text{ so ist } \frac{m\,c^2}{\sqrt{2\,m^2\,c^2 + 1}} = \frac{c}{\sqrt{2}} \sin \alpha$$

mithin

$$\sqrt{c^2 + 1} \cos w = \frac{c}{\sqrt{2}} \sin \alpha + \cos \beta = \operatorname{ctg} \beta \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta}$$

wenn $\frac{c}{\sqrt{2}} = \operatorname{ctg} \beta$ gesetzt wird.

Aus $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2\,m^2\,c^2 + 1}}$ folgt $\operatorname{tg} \alpha = m\,c\,\sqrt{2}$

Mithin hat man zur Bestimmung von v folgende Gleichungen der Reihe nach zu berechnen:

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{c}{\sqrt{2}} \qquad \sin(\alpha + \beta) = \sqrt{c^2 + 1} \cos w \qquad m = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{c\sqrt{2}}$$

Das sind, wie leicht einzusehen, genau dieselben Gleichungen, die oben gefunden wurden.

Berechnung von n (s. Fig. 42 a).

$\underline{n}$ liegt in den Zonen $\underline{e}\,n\,\underline{m}$ und $n\,f\,n'$, folglich ergibt sich vermöge der Gl. 5, S. 9, wenn die Indices von n durch $1\ \frac{1}{n}\ \frac{1}{m}$ bezeichnet werden

$$n = \frac{5}{3} \text{ und } m = \frac{5}{2}$$

$$n = \tfrac{5}{2} P \tfrac{5}{3} \text{ oder } (5\,3\,2)$$

Die Combination weist mithin auf:

$P\infty$	∞P	$\infty P \infty$	$3P$	$2P$
$\underline{e}$	$\underline{m}$	a	d	f
$(1\,0\,1)$	$(1\,\bar{1}\,0)$	$(1\,0\,0)$	$(3\,3\,1)$	$(2\,2\,1)$
P	$\frac{1}{2}P$	$\frac{1}{3}P$	$\frac{1}{7}P$	$\frac{5}{2}P\frac{5}{3}$
p	h	k	v	n
$(1\,1\,1)$	$(1\,1\,2)$	$(1\,1\,3)$	$(1\,1\,7)$	$(5\,3\,2)$

Hexagonales System.

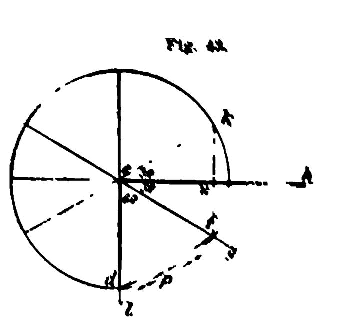
§. 14.

Berechnung der dihexagonalen Pyramiden mPn.

Zur Berechnung der hexagonalen Formen wählen wir drei ungleich grosse auf einander senkrechte Axen (nach dem Vorgange von Schrauf) [1]. In der Fig. 43 repräsentire de = 1 die

[1] A. Schrauf, Lehrbuch der Krystallographie und Mineral-Morphologie. Wien 1866.

Grösse und Richtung der X-Axe. df repräsentire eine Fläche der hexagonalen Grundpyramide. Wir verlängern df bis zum Schnittpunkte h mit eu und nehmen eh als Grösse der Y-Axe. Die Z-Axe stehe auf der Ebene der beiden Axen X und Y senkrecht; ihre Grösse sei c (in der Fig. 43 wird sie durch den Punkt e dargestellt). Wir haben zunächst die Parameter der Grundpyramide, alsdann die Parameter und Indices irgend einer Fläche der dihexagonalen Pyramide zu finden.



Die Fläche df der Grundpyramide schneidet die Y-Axe im Punkte h, die X-Axe im Punkte d. Aus dem rechtwinkligen ebenen Dreieck deh folgt $\operatorname{tg} 60 = \frac{eh}{ed} = eh$, mithin

$$eh = \sqrt{3}$$

Das Parameterverhältniss der Grundpyramide oder das Verhältniss der Axenlängen ist mithin

$$1 : \sqrt{3} : c$$

dp repräsentire eine dihexagonale Pyramidenfläche, welche die X-Axe im Punkte d, mithin in der Entfernung 1 vom Mittelpunkte schneide. Die Y-Axe wird von ihr im Punkte v geschnitten und es fragt sich, wie gross ist ev. Die Fläche dp schneidet die Linie ef im Punkte g und es sei eg = n · ef. In dem ebenen Dreieck ged kennen wir die Seite ge = n. de = 1 und ∢ deg = 60°. Wir können mithin den Winkel edg berechnen. Die Rechnung ergibt zunächst die Gleichung

$$\operatorname{tg}(edg - 60) = \frac{n - 1}{n + 1} \cdot \sqrt{3}$$

Daraus folgt

$$\frac{\operatorname{tg} edg - \operatorname{tg} 60}{1 + \operatorname{tg} edg \cdot \operatorname{tg} 60} = \frac{n - 1}{n + 1} \cdot \sqrt{3}$$

oder

$$\frac{\operatorname{tg} edg - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} edg} = \frac{n-1}{n+1} \cdot \sqrt{3}$$

Daraus erhält man nach einigen leichten Reductionen

$$\operatorname{tg} edg = \frac{n\sqrt{3}}{2-n}$$

Aus dem Dreieck edv folgt

$$\operatorname{tg} edg = \frac{ev}{ed} = \frac{ev}{1} = ev$$

mithin

$$1)\quad ev = \frac{n\sqrt{3}}{2-n}$$

Aus dieser Gleichung folgt für $n = 1$ der Werth $\sqrt{3}$. Für $n = 1$ geht aber, wie die Fig. 19 zeigt, ev in eh über und oben wurde schon für eh der Werth $\sqrt{3}$ gefunden. Verlängert man pf bis zum Schnittpunkt s mit der Linie ek, so ergibt sich aus den ähnlichen Dreiecken dfl und sel sogleich $es = \frac{n}{n-1}$

Nehmen wir noch an, die dihexagonale Pyramidenfläche dp schneide die Z-Axe in mc, so ist das Parameterverhältniss der dihexagonalen Pyramidenfläche dp in Bezug auf die angenommenen 3 Axen

$$1 : \frac{n\sqrt{3}}{2-n} : mc$$

Die Parameterverhältnisse der Flächen pf und fw (w zwischen u und h ist nicht gezeichnet) ergeben sich in analoger Weise. Für pf ist das Verhältniss $n : \frac{n\sqrt{3}}{2n-1} : mc$, für wf ist es $\frac{n}{n-1} : \frac{n\sqrt{3}}{n+1} : mc$

Die Indices der Fläche dp sind mithin $1\ \frac{2-n}{n}\ \frac{1}{m}$. Die der Fläche pf $\frac{1}{n}\ \frac{2n-1}{n}\ \frac{1}{m}$. Die der Fläche fw $\frac{n-1}{n}\ \frac{n+1}{n}\ \frac{1}{m}$

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zur Berechnung der dihexagonalen Pyramide über. Die Austrittspunkte der Axen sind in Fig. 44a durch x, y, z bezeichnet.

Den Winkel der Polkante, welche den Endpunkt der Z-Axe mit dem Endpunkt der X-Axe verbindet, bezeichnen wir durch Z; den anderen Polkantenwinkel durch Y und den Randkantenwinkel durch X.

a) Gegeben Z und Y, gesucht die Indices der Fläche e.

In den Fig. 44 und 44a repräsentire e die dihexagonale Pyramidenfläche, deren Indices $1 \frac{2-n}{n} \frac{1}{m}$ sind.

Fig. 44.

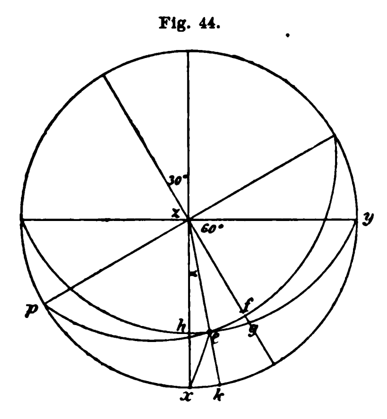
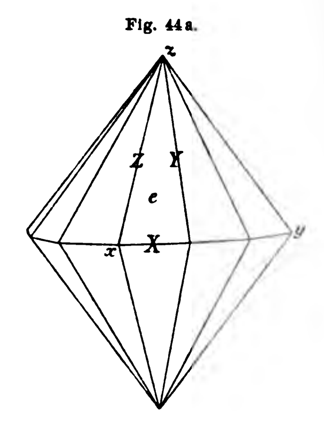


Fig. 44a.



Die Gleichung dieser Fläche ist

$$2)\ \cos ex = \frac{n\sqrt{3}}{2-n} \cos ey = mc \cos ez$$

Es sei $eh = 90 - \frac{Z}{2}$ und $ef = 90 - \frac{Y}{2}$ und der Winkel $hzf = 30^0$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ehz folgt

$$\sin eh = \sin ez \sin \alpha$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ezf folgt

$$\sin ef = \sin ez \sin (30 - \alpha)$$

Aus beiden Gleichungen folgt durch Division

$$\frac{\sin (30 - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\cos \frac{1}{2} Y}{\cos \frac{1}{2} Z}$$

und daraus ergibt sich leicht:

$$d)\ \operatorname{ctg} \alpha - \sqrt{3} = \frac{2 \cos \frac{1}{2} Y}{\cos \frac{1}{2} Z}$$

Aus dem sphärischen Dreieck exz folgt

$$\cos ex = \sin ez \cos \alpha$$

Aus dem sphärischen Dreieck eyz folgt

$$\cos ey = \sin ez \sin \alpha$$

Aus beiden Gleichungen folgt durch Division:

$$\frac{\cos ex}{\cos ey} = \operatorname{ctg} \alpha$$

Nach Gl. 2 ist aber

$$\frac{\cos ex}{\cos ey} = \frac{n\sqrt{3}}{2 - n}$$

Mithin ist

$$\text{e)}\ \operatorname{ctg} \alpha = \frac{n\sqrt{3}}{2 - n}$$

Aus dieser Gleichung folgt leicht

$$n = \frac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha + \sqrt{3}}$$

und daraus folgt

$$n - 1 = \frac{\operatorname{ctg} \alpha - \sqrt{3}}{\operatorname{ctg} \alpha + \sqrt{3}}$$

$$2 - n = \frac{2\sqrt{3}}{\operatorname{ctg} \alpha + \sqrt{3}}$$

Durch Division folgt

$$\frac{2 - n}{n - 1} = \frac{2\sqrt{3}}{\operatorname{ctg} \alpha - \sqrt{3}}$$

Vermöge Gl. d folgt hieraus:

$$\text{f)}\ \frac{2 - n}{n - 1} = \frac{\sqrt{3} \cos \frac{1}{2} Z}{\cos \frac{1}{2} Y} = \frac{\operatorname{tg} 60 \cos \frac{1}{2} Z}{\cos \frac{1}{2} Y}$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ehz folgt

$$\sin zh = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} Z$$

und daraus, vermöge Gl. e:

$$\sin zh = \frac{n\sqrt{3}}{2 - n} \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} Z$$

und da $hx = 90 - zh$ ist

$$\text{g)}\ \cos hx = \frac{n\sqrt{3}}{2 - n} \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} Z = \frac{n \operatorname{tg} 60}{2 - n} \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} Z$$

Aus dem [illegible] Dreieck [illegible] folgt

$$\cos [illegible] = \cos [illegible] \sin \frac{Z}{2}$$

aus dem [illegible] Dreieck [illegible] folgt

$$\cos [illegible] = \sin hx \sin \frac{Z}{2}$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$\frac{\cos [illegible]}{\cos [illegible]} = \operatorname{ctg} hx$$

Nach Gl. 2 ist aber

$$\frac{\cos [illegible]}{\cos [illegible]} = mc$$

mithin ist

$$mc = \operatorname{ctg} hx$$

Um m und n zu finden, hat man der Reihe nach folgende Gleichungen zu berechnen:

$$3) \quad \begin{cases} \dfrac{2-n}{n-1} = \dfrac{\operatorname{tg} 60 \cos \frac{1}{2} Z}{\cos \frac{1}{2} Y} \\[2ex] \cos hx = \dfrac{n \operatorname{tg} 60}{2-n} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} Z \qquad mc = \operatorname{ctg} hx \end{cases}$$

Beispiel. An der dihexagonalen Pyramide des Berylls sind bekannt:

$$Z = 134^\circ\, 26' \text{ und } Y = 167^\circ\, 10' \text{ und } c = 0{,}5000$$

$$\lg \operatorname{tg} 60 = 0{,}2386$$
$$\lg \cos \tfrac{1}{2} Z = 9{,}5880$$
$$E \lg \cos \frac{Y}{2} = 0{,}9517$$
$$\lg \frac{2-n}{n-1} = 0{,}7783$$
$$\frac{2-n}{n-1} = 6$$
$$n = \frac{8}{7}$$

$$\lg \frac{n}{2-n} = 0{,}1249$$
$$\lg \operatorname{tg} 60 = 0{,}2386$$
$$\lg \operatorname{ctg} \frac{Z}{2} = 9{,}6233$$
$$\lg \cos hx = 9{,}9868$$
$$hx = 14^\circ\, 8'\, 10''$$

$$\lg \operatorname{ctg} hx = 0{,}6015$$
$$E \lg c = 0{,}3010$$
$$\lg m = 0{,}9025$$
$$m = 7{,}99\ldots = 8$$

Die dihexagonale Pyramide $8P\frac{8}{7}$ liegt vor.

Die Indices der Fläche e in Bezug auf unsere 3 Axen sind 8 6 1.

Die Indices in Bezug auf die gewöhnlichen 4 Axen sind (1 8 7 1). Der erste Index bezieht sich hier immer auf die links von der X-Axe liegende gewöhnliche Axe, der zweite auf die X-Axe, der dritte auf die rechts von der X-Axe liegende gewöhnliche Axe und der vierte auf die Hauptaxe. Die positiven Richtungen der genannten 3 gewöhnlichen Nebenaxen sind dem Beobachter zugewendet.

b) Gegeben X und Z, gesucht die Indices der Fläche e.

In der Fig. 44 repräsentire e wieder die Fläche $1 \frac{2-n}{n} \frac{1}{m}$

Die Gleichung dieser Fläche ist

$$\cos ex = \frac{n\sqrt{3}}{2-n} \cos ey = mc \cos ez$$

Ferner sei $eh = 90 - \frac{Z}{2}$ und $ek = 90 - \frac{X}{2}$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ehz folgt

$\cos ez = \cos eh \cos hz$ oder da $ez = 90 - ek = \frac{X}{2}$

und $hz = 90 - hx$ ist,

$$\cos\frac{X}{2} = \sin\frac{Z}{2} \sin hx \quad \text{folglich} \quad \sin hx = \cos\frac{X}{2} : \sin\frac{Z}{2}$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ehx folgt

$$\cos ex = \cos hx \sin\frac{Z}{2}$$

Nun ist $mc = \frac{\cos ex}{\cos ez} = \frac{\cos hx \sin\frac{Z}{2}}{\cos\frac{X}{2}}$

und aus der Gleichung

$$\sin hx = \frac{\cos\frac{X}{2}}{\sin\frac{Z}{2}} \quad \text{folgt} \quad \frac{\sin\frac{Z}{2}}{\cos\frac{X}{2}} = \frac{1}{\sin hx}$$

Dies substituirt in die letzte Gleichung gibt

$$mc = \operatorname{ctg} hx$$

Ferner ist, da $ey = 90 - eh = \frac{1}{2} Z$ ist:

$$\frac{n\sqrt{3}}{2-n} = \frac{\cos ex}{\cos ey} = \frac{\cos hx \sin \frac{1}{2} Z}{\cos \frac{1}{2} Z} = \cos hx \operatorname{tg} \frac{1}{2} Z$$

Daher

$$\frac{n}{2-n} = \frac{\cos hx \operatorname{tg} \frac{1}{2} Z}{\sqrt{3}} = \cos hx \operatorname{tg} \frac{1}{2} Z \operatorname{ctg} 60.$$

Um daher m und n zu finden, hat man folgende Gleichungen zu berechnen:

$$4) \left\{ \begin{array}{ll} \sin hx = \dfrac{\cos \frac{1}{2} X}{\sin \frac{1}{2} Z} & mc = \operatorname{ctg} hx \\ \dfrac{n}{2-n} = \cos hx \operatorname{tg} \frac{1}{2} Z \operatorname{ctg} 60 & \end{array} \right.$$

Beispiel. An der dihexagonalen Pyramide des Berylls kennt man:

$$X = 113^0 28' \text{ und } Z = 161^0 49' \text{ und } c = 0{,}4999$$

$$\lg \cos \frac{X}{2} = 9{,}7392$$
$$E \lg \sin \tfrac{1}{2} Z = 0{,}0055$$
$$\lg \sin hx = 9{,}7447$$
$$hx = 33^0 45'$$

$$\lg \operatorname{ctg} hx = 0{,}1751$$
$$E \lg c = 0{,}3010$$
$$\lg m = 0{,}4761$$
$$m = 3$$

$$\lg \cos hx = 9{,}9199$$
$$\lg \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} Z = 0{,}7958$$
$$\lg \operatorname{ctg} 60 = 9{,}7614$$
$$\lg \frac{n}{2-n} = 0{,}4771$$
$$\frac{n}{2-n} = 3$$
$$n = \frac{3}{2}$$

Es liegt die dihexagonale Pyramide $3P\frac{3}{2}$ vor.

Die Indices der Pyramidenfläche e in Bezug auf unsere 3 Axen sind: $1 \frac{1}{3} \frac{1}{3}$ oder 3 1 1.

Die Indices in Bezug auf die gewöhnlichen 4 Axen sind (1 3 2 1).

c) Gegeben X und Y, gesucht die Indices der Fläche e.

In der Fig. 44 sei wieder e die dihexagonale Pyramidenfläche $1 \frac{2-n}{n} \frac{1}{m}$. Die Gleichung dieser Fläche ist

$$\cos ex = \frac{n\sqrt{3}}{2-n} \cos ey = mc \cos ez$$

Es sei $ek = 90 - \frac{X}{2}$ und $ef = 90 - \frac{Y}{2}$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck efz folgt $\sin ef = \sin ez \sin ezf$ und da $ezf = 30 - \alpha$

und $ez = 90 - ek = \frac{X}{2}$ ist,

$$\cos \frac{Y}{2} = \sin \frac{X}{2} \sin (30 - \alpha)$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck exk folgt $\cos ex = \cos ek \cos xk$ oder da $xk = \alpha$ ist,

$$\cos ex = \sin \frac{X}{2} \cos \alpha$$

Aus dem sphärischen Dreieck eyz folgt

$$\cos ey = \sin ez \cos (90 - \alpha) = \sin ez \sin \alpha = \sin \frac{X}{2} \sin \alpha$$

Nun ist

$$\frac{n\sqrt{3}}{2-n} = \frac{\cos ex}{\cos ey} = \frac{\sin \frac{1}{2} X \cos \alpha}{\sin \frac{1}{2} X \sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$$

Mithin

$$\frac{n}{2-n} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{3}} = \operatorname{ctg} \alpha \,.\, \operatorname{ctg} 60$$

Ferner ist

$$mc = \frac{\cos ex}{\cos ez} = \frac{\sin \frac{1}{2} X \cos \alpha}{\cos \frac{1}{2} X} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} X \,.\, \cos \alpha$$

Um daher m und n zu finden, hat man folgende Gleichungen zu berechnen:

$$5) \left\{ \begin{array}{ll} \sin (30 - \alpha) = \dfrac{\cos \frac{1}{2} Y}{\sin \frac{1}{2} X} & \dfrac{n}{2-n} = \operatorname{ctg} \alpha \,.\, \operatorname{ctg} 60 \\ \multicolumn{2}{c}{mc = \operatorname{tg} \frac{1}{2} X \,.\, \cos \alpha} \end{array} \right.$$

Beispiel. An der dihexagonalen Pyramide des Beryll's ist bekannt:

$$X = 90^\circ 54' \text{ und } Y = 153^\circ 1' \text{ und } c = 0{,}4999$$

$$\begin{aligned} \lg \cos \tfrac{1}{2} Y &= 9{,}3680 \\ E \lg \sin \tfrac{1}{2} X &= 0{,}1471 \\ \hline \lg \sin (30 - \alpha) &= 9{,}5151 \\ 30 - \alpha &= 19^\circ 7' \\ \alpha &= 10^\circ 53' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg \operatorname{ctg} \alpha &= 0{,}7161 \\ \lg \operatorname{ctg} 60 &= 9{,}7614 \\ \hline \lg \frac{n}{2 - n} &= 0{,}4775 \\ \frac{n}{2 - n} &= 3 \\ n &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} X &= 0{,}0068 \\ \lg \cos \alpha &= 9{,}9921 \\ E \lg c &= 0{,}3010 \\ \hline \lg m &= 0{,}2999 \\ m &= 2 \end{aligned}$$

Die Pyramide hat die Formel $2P\frac{3}{2}$

Die Indices der Fläche e in Bezug auf unsere 3 Axen sind 6 2 3, in Bezug auf die gewöhnlichen 4 Axen (2 6 4 3).

Berechnung der hexagonalen Pyramide mP.

Den Polkantenwinkel nennen wir Z, den Randkantenwinkel X.

Setzen wir in den eben entwickelten Formeln Y = 180, so erhalten wir die zur Berechnung der hexagonalen Pyramide mP dienenden Gleichungen.

a) Gegeben Z.

Aus den Gl. 3, S. 117 folgt für $\frac{Y}{2} = 90$ und $n = 1$

1) $\cos hx = \operatorname{tg} 60 \operatorname{ctg} \frac{Z}{2}$ $\qquad mc = \operatorname{ctg} hx$

b) Gegeben X.

Aus den Gl. 5, S. 120 folgt für $\frac{Y}{2} = 90$ und $n = 1$:
$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} 60$, mithin $\alpha = 30$, folglich

$$2)\quad mc = \operatorname{tg} \frac{X}{2} \cos 30$$

Berechnung der Deuteropyramide mP2.

In der Fig. 45 repräsentire e die Deuteropyramidenfläche $1\,0\,\frac{1}{m}$. Die Gleichung dieser Fläche ist

$$\cos ex = mc \cos ez$$

Fig. 45.

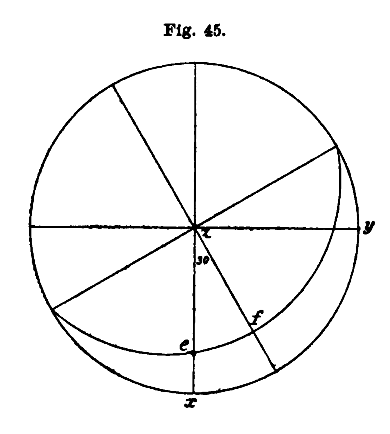
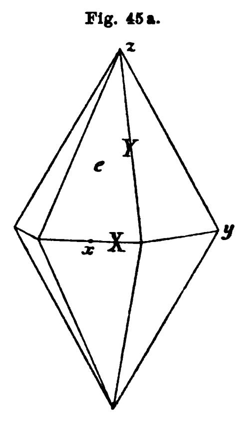


Fig. 45a.



Es sei $ef = 90 - \frac{Y}{2}$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck efz folgt

$$\sin ef = \sin ez \sin 30$$

oder

$$\cos \frac{Y}{2} = \sin ez \sin 30 = \cos ex \sin 30$$

mithin

$$\cos ex = \frac{\cos \frac{Y}{2}}{\sin 30} = 2 \cos \frac{Y}{2}$$

Nun ist

$$mc = \frac{\cos ex}{\cos ez} = \frac{\cos ex}{\sin ex} = \operatorname{ctg} ex$$

a) Gegeben Y, gesucht die Indices der Fläche e.

1) $\cos ex = 2 \cos \frac{Y}{2}$ $\qquad mc = \operatorname{ctg} ex$

b) Gegeben X, gesucht die Indices der Fläche e.

2) $mc = \operatorname{ctg} ex = \operatorname{tg} \frac{X}{2}$

Berechnung der dihexagonalen Prismen ∞Pn.

Die zur Berechnung der dihexagonalen Prismen dienenden Gleichungen erhält man, indem man in den oben entwickelten Formeln $X = 180$ setzt.

a) Gegeben Z.

Aus den Gl. 4, S. 119 folgt für $\frac{X}{2} = 90$, $hx = 0$

Mithin

$$1) \quad \frac{n}{2 - n} = \operatorname{tg} \frac{Z}{2} \operatorname{ctg} 60$$

b) Gegeben Y.

Aus den Gl. 5, S. 120 folgt für $\frac{X}{2} = 90$ zunächst

$\sin (30 - \alpha) = \cos \frac{Y}{2}$, woraus $30 - \alpha = 90 - \frac{Y}{2}$, folglich $\alpha = \frac{Y}{2} - 60$. Mithin

$$2) \quad \frac{n}{2 - n} = \operatorname{ctg} \left(\frac{Y}{2} - 60\right) \operatorname{ctg} 60$$

Rhomboëdrische Hemiëdrie.

§. 14.

Berechnung der Skalenoëder $\frac{mPn}{2}$.

Die schärfere Polkante des hexagonalen Skalenoëders nennen wir Z, die stumpfere Y und die Randkante X. In der Fig. 46 ist e die Projection der Skalenoëderfläche $1 \frac{2-n}{n} \frac{1}{m}$. Die Gleichung dieser Fläche ist

$$1) \cos ex = \frac{n\sqrt{3}}{2-n} \cos ey = mc \cos ez$$

Fig. 46.

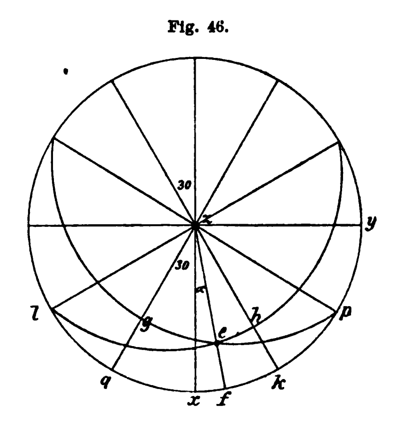
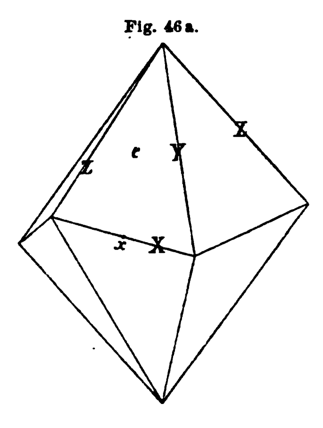


Fig. 46a.



a) Gegeben X und Z, gesucht die Indices der Fläche e. Es sei (s. Fig. 46) $eg = 90 - \frac{Z}{2}$ und $ex = 90 - \frac{X}{2}$

Aus dem sphärischen Dreieck exz folgt

$$\cos ex = \sin ez \cos \alpha$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck egz folgt

$$\sin eg = \sin ez \sin (30 + \alpha).$$

Aus beiden Gleichungen folgt durch Division

$$\frac{\sin eg}{\cos ex} = \frac{\sin (30 + \alpha)}{\cos \alpha} = \sin 30 + \cos 30 \operatorname{tg} \alpha$$

oder

$$\text{d)}\quad \frac{2 \cos \frac{Z}{2}}{\sin \frac{X}{2}} = 1 - \sqrt{3}\ \text{tg}\ \alpha$$

Aus dem sphärischen Dreieck exy folgt

$$\cos ey = \sin ex \cos (90 - \alpha) = \sin ex \sin \alpha$$

Nun ist vermöge Gl. 1

$$\text{e)}\quad \frac{n\sqrt{3}}{2 - n} = \frac{\cos ex}{\cos ey} = \frac{\sin ex \cos \alpha}{\sin ex \sin \alpha} = \text{ctg}\ \alpha$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$n = \frac{2}{1 + \sqrt{3}\ \text{tg}\ \alpha}$$

Aus dieser und der Gl. d folgt

$$\text{f)}\quad n = \frac{\sin \frac{X}{2}}{\cos \frac{Z}{2}}$$

Aus dem sphärischen Dreieck exp in welchem $xp = 60$, $ep = 90 - eg = \frac{Z}{2}$ und $\sphericalangle\, epx = 90 - epz = 90 - gz$ ist, folgt

$$\cos ex = \cos ep \cos 60 + \sin ep \sin 60 \sin zg$$

oder

$$\sin \frac{X}{2} = \cos \frac{Z}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{Z}{2} \sin zg$$

oder

$$\frac{2 \sin \frac{X}{2}}{\cos \frac{Z}{2}} = 1 + \sqrt{3}\ \text{tg}\ \frac{Z}{2} \sin zg$$

Aus dieser Gleichung folgt mit Berücksichtigung der Gl. f

$$\text{g)}\quad \sin zg = \frac{2n - 1}{\sqrt{3}}\ \text{ctg}\ \frac{Z}{2}$$

Aus den sphärischen Dreiecken exz und ezg folgt

$$\sin ez = \frac{\sin \frac{X}{2}}{\cos \alpha}$$

und

$$\cos ez = \cos zg \sin \frac{Z}{2}$$

Daraus durch Division

$$\operatorname{tg} ez = \frac{\sin \frac{X}{2}}{\cos \alpha \cos zg \sin \frac{Z}{2}}$$

Nun ist vermöge Gl. 1

$$mc = \frac{\cos ex}{\cos ez} = \frac{\sin ez \cos \alpha}{\cos ez} = \operatorname{tg} ez \cos \alpha$$

Mithin

$$mc = \frac{\sin \frac{X}{2}}{\sin \frac{Z}{2} \cos zg}$$

Nach Gl. f ist $\sin \frac{X}{2} = n \cos \frac{Z}{2}$ mithin

$$mc = \frac{n \operatorname{ctg} \frac{Z}{2}}{\cos zg}$$

Setzt man für $\operatorname{ctg} \frac{Z}{2}$ den aus Gl. g folgenden Werth, so ergibt sich

$$\text{h)} \quad mc = \frac{n\sqrt{3}}{2n-1} \operatorname{tg} gz$$

Um daher m und n zu finden, hat man die folgenden Gleichungen zu berechnen:

$$2) \left\{ \begin{array}{ll} n = \dfrac{\sin \frac{X}{2}}{\cos \frac{X}{2}} & \sin gz = (2n-1) \operatorname{ctg} 60 \operatorname{ctg} \dfrac{Z}{2} \\ & mc = \dfrac{n}{2n-1} \cdot \operatorname{tg} 60 \cdot \operatorname{tg} gz \end{array} \right.$$

Beispiel. An einem Kalkspathskalenoëder hat man gemessen $X = 133^\circ 0' 20''$ und $Z = 104^\circ 37' 20''$

Bekannt ist ferner $c = 0{,}8543$

$$\begin{array}{ll}
\lg \sin \frac{X}{2} = 9.9624 & \lg (2n - 1) = 0.30103 \\
 & \lg \operatorname{ctg} 60 \quad = 9.76144 \\
E \lg \cos \frac{Z}{2} = 0.2137 & \lg \operatorname{ctg} \frac{Z}{2} \quad = 9.88770 \\
\hline
\lg n = 0.1761 & \lg \sin gz = 9.95017 \\
n = 1{,}5 = \frac{3}{2} & gz = 63^\circ 4'
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\lg \frac{n}{2n - 1} & = 9{,}8751 \\
\lg \operatorname{tg} 60 & = 0{,}2386 \\
\lg \operatorname{tg} gz & = 0{,}2941 \\
E \lg c & = 0{,}0684 \\
\hline
\lg m & = 0{,}4762 \\
m & = 2{,}99 .. = 3
\end{array}$$

Das Skalenoëder ist $\frac{3 P \frac{3}{2}}{2}$

In Bezug auf die gewöhnlichen 4 Axen sind die Indices der Fläche e 1 3 2 1.

b) Gegeben X und Y, gesucht die Indices der Fläche e. Die Gl. 1 besteht auch jetzt. Es sei (Fig. 46)

$$ex = 90 - \frac{X}{2} \quad \text{und} \quad eh = 90 - \frac{Y}{2}$$

Aus den beiden sphärischen Dreiecken exz und eyz folgt

$$\cos ex = \sin ez \cos \alpha$$
$$\cos ey = \sin ez \sin \alpha$$

Durch Division folgt

$$\frac{\cos ex}{\cos ey} = \operatorname{ctg} \alpha$$

Nach Gl. 1 ist

$$\frac{n \sqrt{3}}{2 - n} = \frac{\cos ex}{\cos ey}$$

mithin $$\frac{n\sqrt{3}}{2-n} = \operatorname{ctg}\alpha$$

woraus wie oben unter a folgt

$$n = \frac{2}{1+\sqrt{3}\ \operatorname{tg}\alpha}$$

Daraus folgt leicht

$$\text{e)}\quad \frac{n}{n-1} = \frac{2}{1-\sqrt{3}\ \operatorname{tg}\alpha}$$

Aus dem sphärischen Dreieck exl, in welchem $xl = 60^{\circ}$, $el = 90 - eh = \frac{Y}{2}$ und $\sphericalangle\, elx = hk = 90 - zh$ ist, folgt

$$\cos ex = \cos 60 \cos \frac{Y}{2} + \sin 60 \sin \frac{Y}{2} \cos hk$$

Daraus folgt

$$\frac{2 \sin \frac{X}{2} - \cos \frac{Y}{2}}{\sqrt{3} \sin \frac{Y}{2}} = \cos hk = \sin zh$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ezh folgt

$$\text{f)}\quad \sin zh = \operatorname{ctg}(30-\alpha) \operatorname{ctg}\frac{Y}{2}$$

Setzt man diesen Werth für $\sin zh$ in die vorhergehende Gleichung, so ergibt sich

$$\frac{2 \sin \frac{X}{2}}{\sqrt{3} \cos \frac{Y}{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{ctg}(30-\alpha) = \frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\sqrt{3}\ \operatorname{tg}\alpha}$$

woraus

$$\frac{\sin \frac{X}{2}}{\cos \frac{Y}{2}} = \frac{2}{1-\sqrt{3}\ \operatorname{tg}\alpha}$$

Setzt man für $\frac{2}{1-\sqrt{3}\ \operatorname{tg}\alpha}$ den aus Gl. e folgenden Werth, so ergibt sich:

$$\text{g)}\quad \frac{n}{n-1} = \frac{\sin \frac{1}{2} X}{\cos \frac{1}{2} Y}$$

Nach Gl. 1 ist

$$mc = \frac{\cos ex}{\cos ez}$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ezh folgt

$$\cos ez = \cos eh \cos zh \quad \text{oder} \quad \cos ez = \sin \frac{Y}{2} \cos zh$$

Mithin

$$mc = \frac{\cos ex}{\sin \frac{1}{2} Y \cos zh} = \frac{\sin \frac{1}{2} X}{\sin \frac{1}{2} Y \cos zh}$$

Setzt man für $\sin \frac{1}{2} X$ den aus Gl. g folgenden Werth, so ergibt sich

$$mc = \frac{n}{n-1} \, \frac{\operatorname{ctg} \frac{1}{2} Y}{\cos zh}$$

Setzt man hier für $\operatorname{ctg} \frac{1}{2} Y$ den aus Gl. f folgenden Werth, so ist

$$mc = \frac{n}{n-1} \operatorname{tg} zh \operatorname{tg} (30 - \alpha) = \frac{n}{n-1} \operatorname{tg} zh \frac{1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{3} + \operatorname{tg} \alpha}$$

Setzt man hier für $1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha$ den aus Gl. e folgenden Werth und für $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2-n}{n\sqrt{3}}$, so ergibt sich

$$mc = \frac{n\sqrt{3}}{n+1} \operatorname{tg} zh = \frac{n}{n+1} \operatorname{tg} 60 \operatorname{tg} zh$$

Aus der oben entwickelten Gleichung

$$\frac{2 \sin \frac{1}{2} X - \cos \frac{1}{2} Y}{\sqrt{3} \sin \frac{1}{2} Y} = \sin zh$$

folgt

$$\frac{2 \sin \frac{1}{2} X : \cos \frac{1}{2} Y - 1}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{1}{2} Y} = \sin zh$$

Berücksichtigt man hier die Gl. g, so folgt

$$\sin zh = \frac{n+1}{(n-1)\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{1}{2} Y} = \frac{n+1}{n-1} \operatorname{ctg} 60 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} Y$$

Um m und n zu finden, hat man daher folgende Gleichungen zu berechnen:

$$3)\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{n}{n-1}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}X}{\cos\frac{1}{2}Y} & \sin zh=\dfrac{n+1}{n-1}\,\text{ctg}\,60\,.\,\text{ctg}\,\tfrac{1}{2}\,Y\\[2ex] mc=\dfrac{n}{n+1}\,\text{tg}\,60\,\text{tg}\,zh & \end{array}\right.$$

Beispiel. An einem Skalenoëder des Kalkspaths hat man gemessen

$$X = 133^{0}\,0'\,20'' \text{ und } Y = 144^{0}\,24'\,20''$$

mithin

$$\frac{X}{2} = 66^{0}\,30'\,10'' \text{ und } \frac{Y}{2} = 72^{0}\,12'\,10''$$

ausserdem kennt man $c = 0{,}8543$

$$\begin{array}{rl}\lg\sin\frac{1}{2}X &= 9{,}9624\\ E\lg\cos\frac{1}{2}Y &= 0{,}5148\\ \hline \lg\dfrac{n}{n-1} &= 0{,}4772\\ \dfrac{n}{n-1} &= 3\\ n &= \frac{3}{2}\end{array}\qquad\begin{array}{rl}\lg\dfrac{n+1}{n-1} &= 0{,}6990\\ \lg\text{ctg}\,60 &= 9{,}7614\\ \lg\text{ctg}\,\frac{1}{2}Y &= 9{,}5065\\ \hline \lg\sin zh &= 9{,}9669\\ zh &= 67^{0}\,55'\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}\lg\dfrac{n}{n+1} &= 9{,}7782\\ \lg\text{tg}\,60 &= 0{,}2386\\ \lg\text{tg}\,zh &= 0{,}3918\\ E\lg c &= 0{,}0684\\ \hline \lg m &= 0{,}4770\\ m &= 3\end{array}$$

Die Formel des Skalenoëders ist $_{3}P\frac{3}{2}$. Die Indices der Fläche e in Bezug auf die gewöhnlichen Axen sind 1 3 2 1.

c) Gegeben Y und Z, gesucht die Indices der Fläche e.

Die Gl. 1 gilt auch jetzt. In der Fig. 46 sei $eg = 90 - \frac{Z}{2}$ und $eh = 90 - \frac{Y}{2}$

Aus den beiden rechtwinkligen sphärischen Dreiecken ehz und egz folgt

$$\sin eh = \sin ez \sin(30 - \alpha)$$
$$\sin eg = \sin ez \sin(30 + \alpha)$$

Aus beiden Gleichungen folgt durch Division

$$\frac{\cos\frac{Y}{2}}{\cos\frac{Z}{2}} = \frac{\sin(30-\alpha)}{\sin(30+\alpha)} = \frac{1-\operatorname{ctg} 30 \,.\, \operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg} 30 \,.\, \operatorname{tg}\alpha}$$

und daraus folgt

$$\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\frac{1}{2}Z - \cos\frac{1}{2}Y}{\cos\frac{1}{2}Z + \cos\frac{1}{2}Y}$$

woraus

$$\text{d)}\quad \sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha + 1 = \frac{2\cos\frac{1}{2}Z}{\cos\frac{1}{2}Z + \cos\frac{1}{2}Y}$$

Vermöge Gl. 1 ist

$$\frac{n\sqrt{3}}{2-n} = \frac{\cos ex}{\cos ey}$$

Aus den sphärischen Dreiecken ezx und ezy folgt

$$\cos ex = \sin ez \cos\alpha \quad \text{und} \quad \cos ey = \sin ez \sin\alpha$$

mithin

$$\text{e)}\quad \frac{n\sqrt{3}}{2-n} = \operatorname{ctg}\alpha$$

woraus wieder wie oben

$$n = \frac{2}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}$$

In Verbindung mit Gl. d folgt

$$n - 1 = \frac{\cos\frac{1}{2}Y}{\cos\frac{1}{2}Z}$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ezh folgt:

$$\sin zh = \operatorname{ctg}(30-\alpha)\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}Y$$

Aus der Gleichung

$$n = \frac{2}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}$$

folgt

$$\frac{n+1}{n-1} = \sqrt{3}\operatorname{ctg}(30-\alpha)$$

Setzt man den Werth von ctg $(30 - \alpha)$ aus dieser Gleichung in die vorhergehende, so folgt

$$f)\ \sin zh = \frac{n+1}{n-1} \operatorname{ctg} 60 \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} Y$$

Aus dem sphärischen Dreieck exl folgt wie früher

$$\cos ex = \tfrac{1}{2} \cos \tfrac{1}{2} Y + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \tfrac{1}{2} Y \sin zh$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ezh folgt

$$\cos ez = \cos zh \sin \tfrac{1}{2} Y$$

Da

$$mc = \frac{\cos ex}{\cos ez}$$

so folgt

$$mc = \frac{\tfrac{1}{2} \cos \tfrac{1}{2} Y + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \tfrac{1}{2} Y \sin zh}{\cos zh \sin \tfrac{1}{2} Y} = \frac{\operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} Y}{2 \cos zh} + \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} zh}{2}$$

Setzt man für $\operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} Y$ den aus Gl. f folgenden Werth, so ergibt sich

$$mc = \frac{n}{n+1} \sqrt{3} \operatorname{tg} zh$$

Um m und n zu finden, hat man folgende Gleichungen zu berechnen:

$$4) \left\{ \begin{aligned} n - 1 &= \frac{\cos \tfrac{1}{2} Y}{\cos \tfrac{1}{2} Z} \\ \sin zh &= \frac{n+1}{n-1} \operatorname{ctg} 60 \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} Y = \cos hk \\ mc &= \frac{n}{n+1} \operatorname{tg} 60 \operatorname{tg} zh \end{aligned} \right.$$

Beispiel. An einem Skalenoëder des Kalkspaths hat man gemessen:

$$Y = 144^{\circ} 24' 20 \quad \text{und} \quad Z = 104^{\circ} 37' 20''$$

ausserdem kennt man $c = 0{,}8543$

$$\lg \cos \tfrac{1}{2} Y = 9{,}4852$$
$$E \lg \cos \tfrac{1}{2} Z = 0{,}2137$$
$$\lg (n - 1) = 9{,}6989$$
$$n - 1 = \frac{1}{2}$$
$$n = \frac{3}{2}$$

$$\lg \frac{n+1}{n-1} = 0{,}6990$$
$$\lg \operatorname{ctg} 60 = 9{,}7614$$
$$\lg \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} Y = 9{,}5065$$
$$\lg \sin zh = 9{,}9669$$
$$zh = 67^0\,55'$$

$$\lg \frac{n}{n+1} = 9{,}7781$$
$$\lg \operatorname{tg} 60 = 0{,}2386$$
$$\lg \operatorname{tg} zh = 0{,}3918$$
$$E \lg c = 0{,}0684$$
$$\lg m = 0{,}4769$$
$$m = 3$$

Das Skalenoëder ist

$$\frac{{}_3P\frac{3}{2}}{2}$$ Die Indices von e sind 1 3 2 1

Mit Hilfe der sphärischen Dreiecke exp und egz (Fig. 46) gewinnt man neue ebenso einfache Formeln. Die genannten Dreiecke liefern die Gleichungen

$$\cos ex = \tfrac{1}{2} \cos \frac{Z}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{Z}{2} \sin gz$$

und

$$\sin gz = \operatorname{ctg} (30 + \alpha) \operatorname{ctg} \frac{Z}{2} = \frac{2n - 1}{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} \frac{Z}{2} = \cos gq$$

Nun ist

$$mc = \frac{\cos ex}{\cos ez} = \frac{\tfrac{1}{2} \cos \tfrac{1}{2} Z + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \tfrac{1}{2} Z \sin gz}{\cos gz \sin \tfrac{1}{2} Z} = \frac{\operatorname{ctg} \tfrac{1}{2} Z}{2 \cos gz} + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} gz$$

Setzt man für $\operatorname{ctg} \frac{Z}{2}$ den aus der vorhergehenden Gleichung folgenden Werth, so ergibt sich

$$mc = \frac{n}{2n - 1} \operatorname{tg} 60 \operatorname{tg} gz$$

Um m und n zu finden, hat man mithin folgende Gleichungen zu berechnen:

$$5)\left\{\begin{aligned} n - 1 &= \frac{\cos\frac{1}{2}Y}{\cos\frac{1}{2}Z} \\ \sin gz &= (2n - 1)\operatorname{ctg} 60 \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}Z = \cos gq \\ mc &= \frac{n}{2n - 1}\operatorname{tg} 60 \operatorname{tg} gz \end{aligned}\right.$$

Die Winkel hk und gq in den Gl. 4 und 5 haben noch eine besondere Bedeutung. gq ist, wie sich leicht beweisen lässt, der Winkel, den die kürzere Polkante mit der Z-Achse bildet und hk der Winkel, den die längere Polkante mit der Z-Achse bildet.

Berechnung der Rhomboëder $\frac{mP}{2}$

Die zur Berechnung der Rhomboëder dienenden Gleichungen erhält man leicht aus den vorhergehenden Gleichungen, indem man n = 1 und Y = 180 setzt. Der blosse Anblick des Rhomboëders lehrt, dass X = 180 — Z ist.

a) Gegeben X, gesucht m.
Aus den Gl. 2, S. 126 folgt

$$1)\ \sin gz = \operatorname{ctg} 60 \operatorname{tg}\frac{X}{2} \qquad mc = \operatorname{tg} 60 \operatorname{tg} gz$$

b) Gegeben Z, gesucht m.
Aus den Gl. 5, S. 134 folgt

$$2)\ \sin gz = \operatorname{ctg} 60 \operatorname{ctg}\frac{Z}{2} \qquad mc = \operatorname{tg} 60 \operatorname{tg} gz$$

§. 15.

Secundäre Ableitung, Bezeichnung und Berechnung der Skalenoëder.

Da die meisten hexagonal krystallisirenden Mineralien der rhomboëdrischen Hemiëdrie unterworfen sind, so hat man die Rhomboëder und Skalenoëder noch auf eine andere repräsentativere Weise bezeichnet.

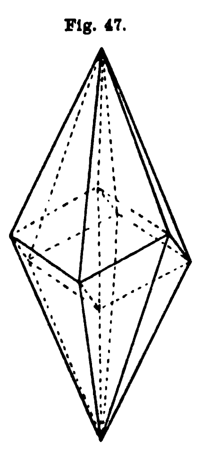
Das aus der Grundpyramide P abgeleitete Rhomboëder bezeichnet man mit R und nennt es das Grundrhomboëder. Das aus mP abgeleitete Rhomboëder bezeichnet man entsprechend mit mR. Da aus jeder Pyramide mP zwei Rhomboëder abgeleitet werden können, ein Rhomboëder + mR und ein Rhomboëder — mR, und da zwei Rhomboëder + mR und — mR im Gleichgewichte ausgebildet den Eindruck einer Pyramide mP machen, so können wir uns die ganze Grundreihe der hexagonalen Pyramiden als eine Reihe von Rhomboëdern vorstellen, so wie es das folgende Schema veranschaulicht.

$$\begin{matrix} & m < 1 & & m > 1 & \\ oR \ldots\ldots & \pm mR \ldots & \pm R \ldots\ldots & \pm mR \ldots & \infty R \end{matrix}$$

Die Grenzformen ∞ R (Protoprisma) und o R (basischer Hauptschnitt) bedürfen nicht der doppelten Zeichen.

Vergleichen wir die Rand- und Mittelkanten eines Rhomboëders mit den Rand- oder Mittelkanten des Skalenoëders, so bemerken wir, dass beide in ihrer Lage vollkommen übereinstimmen, dass mithin, weil aus den Randkanten des Rhomboëders das ganze Rhomboëder construirt werden kann, einem jeden Skalenoëder ein einziges Rhomboëder eingeschrieben werden kann, welches mit dem Skalenoëder die Randkanten gemein hat (Fig. 47). Dieses Rhomboëder nennt man das Rhomboëder der Mittelkanten. Aus einem Rhomboëder lassen sich nun in der folgenden Weise alle möglichen Skalenoëder ableiten. Wir multipliciren die Hauptaxe mc des Rhomboëders mR mit einer Zahl n und legen durch jede Randkante des Rhomboëders zwei Flächen, welche die Hauptaxe in ihren neuen Endpunkten schneiden. Das dadurch entstehende Skalenoëder bezeichnen wir mit mRn. Der kleinste Werth, den n annehmen kann, ist 1, der grösste ∞ und es ist sofort einleuchtend, dass mR∞ mit dem Deuteroprisma ∞P_2 zusammenfällt.

Fig. 47.



Da man auch aus den Polkanten eines jeden Rhomboëders das Rhomboëder selbst construiren kann, ein jedes Skalenoëder

aber drei schärfere und drei stumpfere Polkanten besitzt, so kann man einem jeden Skalenoëder noch zwei andere Rhomboëder einschreiben. Das eine Rhomboëder hat zu Polkanten die längeren Polkanten, das andere die kürzeren Polkanten des Skalenoëders. Das erstere nennt man das Rhomboëder der längeren Polkanten, das zweite das Rhomboëder der kürzeren Polkanten. Ist mithin ein Skalenoëder gegeben, so kann man nach dem eben Gesagten leicht die drei Rhomboëder hineinconstruiren. Kennt man mithin das m und n eines Skalenoëders $\frac{mPn}{2}$, so muss man das m' der drei eingeschriebenen Rhomboëder m'R berechnen können.

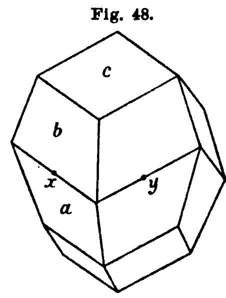


Fig. 48.

Die Fig. 48 repräsentirt eine Combination des Skalenoëders b $\frac{mPn}{2}$ mit dem eingeschriebenen Rhomboëder $\frac{m'P}{2}$ oder $m'R = c$. Vermöge der Zonengleichung ist es nun sehr leicht, m' aus m und n zu berechnen.

Die Indices der Fläche a sind $1, \frac{-(2-n)}{n}, -\frac{1}{m}$

Die Indices der Fläche b sind $1, \frac{2-n}{n}, \frac{1}{m}$

Die Indices der Fläche c sind $1, 1, \frac{1}{m'}$

Mithin muss vermöge der Gl. 4, S. 8 sein:

$$\frac{2}{m} - \frac{1}{m'} \cdot \frac{2(2-n)}{n} = 0$$

woraus

$$m' = \frac{m(2-n)}{n}$$

Das Rhomboëder der Mittelkanten hat daher das Zeichen:

$$+\frac{\frac{m(2-n)}{n}P}{2}$$

Um das Rhomboëder der kürzeren Polkanten zu berechnen, denken wir uns auf jeder der oberen und unteren längeren Polkanten einen gleichweit vom Endpunkt der Hauptaxe abstehenden Punkt und legen durch denselben eine Ebene parallel mit je zwei kürzeren Polkanten. Diese Ebenen schneiden die Flächen des Skalenoëders in Kanten, die den kürzeren Polkanten des Skalenoëders parallel sind und es ist klar, dass wir jetzt eine Combination des Skalenoëders mit dem Rhomboëder der kürzeren Polkanten vor uns haben. Wie oben, finden wir als das Zeichen für das Rhomboëder der kürzeren Polkanten:

$$+ \frac{\frac{m(2n-1)}{n} P}{2}$$

Um das Rhomboëder der längeren Polkanten zu berechnen, denken wir uns auf jeder der oberen und unteren kürzeren Polkanten einen gleichweit vom Endpunkte der Hauptaxe abstehenden Punkt und legen durch denselben eine Ebene parallel mit je zwei längeren Polkanten. Diese Ebenen schneiden die Flächen des Skalenoëders in Kanten, die den längeren Polkanten des Skalenoëders parallel sind und es ist klar, dass wir nun eine Combination des Skalenoëders mit dem Rhomboëder der längeren Polkanten vor uns haben. Wir finden als Zeichen für das Rhomboëder der längeren Polkanten wie oben:

$$- \frac{\frac{m(n+1)}{n} P}{2}$$

Vergleicht man die Längen der Hauptaxen dieser drei aus dem Skalenoëder abgeleiteten Rhomboëder, so erhält man die interessante Beziehung:

$$n + 1 = (2n - 1) + (2 - n)$$

In Worten: Die halbe Hauptaxe des Rhomboëders der längeren Polkanten ist gleich der Summe der halben Hauptaxen der beiden anderen Rhomboëder.

Wir legen uns jetzt die Frage vor: welcher Zusammenhang besteht zwischen den beiden Zeichen $\frac{mPn}{2}$ und $m'Rn'$ des

Skalenoëders, oder wie kann man m' und n' aus m und n finden und umgekehrt?

In dem Zeichen $m'Rn'$ bedeutet $m'R$, wie wir gesehen haben, das Rhomboëder der Mittelkanten des Skalenoëders $\frac{mPn}{2}$ und wir haben gefunden:

$$m' = \frac{m(2-n)}{n}$$

Die Grösse n' war die Zahl, mit welcher m' multiplicirt werden musste, damit das m des Skalenoëders $\frac{mPn}{2}$ herauskam. Daher muss sein:

$$m'n' = m \text{ oder}$$

$$\frac{m(2-n)}{n}\,n' = m$$

Daraus folgt

$$n' = \frac{n}{2-n}$$

und daraus folgt

$$n = \frac{2n'}{n'+1}$$

Zwischen den beiden Zeichen $\frac{mPn}{2}$ und $m'Rn'$ besteht mithin die Beziehung:

$$m'Rn' = \frac{m(2-n)}{n} R \frac{n}{2-n} \text{ äquivalent } \frac{mPn}{2}$$

$$\text{und } mRn \text{ äquivalent } \frac{mnP\frac{2n}{n+1}}{2}$$

Wollen wir die für das Skalenoëder $\frac{mPn}{2}$ durchgeführten Rechnungsformeln so umformen, dass sie dem secundären Zeichen $m'Rn'$ entsprechen, so haben wir, da $m'Rn'$ äquivalent $\frac{m'n'P\frac{2n'}{n'+1}}{2} = \frac{mPn}{2}$ ist, in den früheren Formeln $m'n'$ für m, und $\frac{2n'}{n'+1}$ für n zu setzen. Ist dies geschehen, so

können die Accente weggelassen werden und wir erhalten die für mRn geltenden Gleichungen.

Oben haben wir gefunden, dass die dem Skalenoëder $\pm \frac{mPn}{2}$ eingeschriebenen 3 Rhomboëder die Zeichen haben:

$$+\frac{\frac{m(2-n)}{n}P}{2} \qquad +\frac{\frac{m(2n-1)}{n}P}{2} \quad \text{und} \quad -\frac{\frac{m(n+1)}{n}P}{2}$$

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich nun, dass die dem Skalenoëder $m'Rn'$ eingeschriebenen 3 Rhomboëder die secundären Zeichen haben:

$$+m'R \qquad +\tfrac{1}{2}m'(3n'-1)R \quad \text{und} \quad -\tfrac{1}{2}m'(3n'+1)R$$

§. 16.

Entwickelung zusammengesetzter Combinationen.

Erstes Beispiel (Beryll) [1]).

Die Fig. 49a repräsentirt eine sechszählige holoëdrische Combination des Berylls. Wählen wir P zur Grundform, so lehrt eine allgemeine Bestimmung, dass

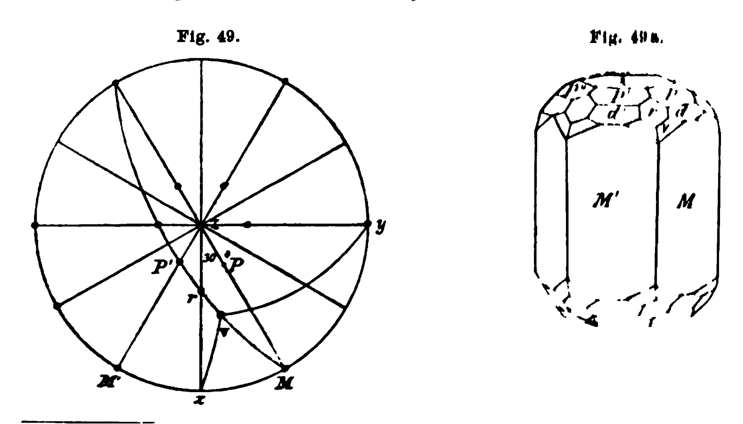


Fig. 49. Fig. 49a.

[1]) Naumann, Lehrbuch d. reinen u. angewandten Krystallographie, 1830, S. 498, Fig. 459.

P die Pyramide P
z der basische Hauptschnitt oP
d eine Pyramide mP
M das Prisma ∞P
r eine Pyramide zweiter Ordnung mP_2
v eine dihexagonale Pyramide mPn

Die Fig. 49 gibt eine stereographische Projection derjenigen Flächen, deren Berechnung aus dem Zonenverbande allein nicht möglich ist.

Bekannt ist der Winkel $v : M = 142^0\,15'$ (Fig. 49a) und der Polkantenwinkel $P : P' = 151^0\,3'$

Berechnung des Axenverhältnisses.

Aus Gl. 1, S. 121

$$\cos hx = \operatorname{tg} 60 \operatorname{ctg} \frac{Z}{2} \quad \text{und} \quad mc = \operatorname{ctg} hx$$

folgt, wenn man m = 1 setzt:

$$hx = 63^0\,26'\,22'' \quad \text{und} \quad c = 0{,}4999$$

Berechnung von r.

Die x-Axe gehe durch die Kante, die M mit M′ verbindet. r liegt in der Zone MvrP′ (Fig. 49 und 49a).

Setzt man daher in die Zonengleichung 4, S. 8 für M die Indices 1 1 0, für P′ die Indices $1\,\bar{1}\,1$ und für r die Indices $1\,0\,\frac{1}{m}$, so erhält man m = 2. Mithin ist $r = {}_2P_2$. Die Indices von r sind 1 2 1 1 (in Bezug auf die gewöhnlichen 4 Axen).

Die Reihenfolge der Indices in Bezug auf die gewöhnlichen 4 Axen wird nach der S. 118 angegebenen Regel gebildet.

Bestimmung von d.

d liegt in der Zone drd′ (Fig. 49a). Setzt man daher in die Zonengleichung die Indices von $1\,1\,\frac{1}{m}$ für d, die Indices

$1\,\bar{1}\,\frac{1}{m}$ für d′ und die Indices 2 0 1 für r, so erhält man m = 2. Mithin ist d = ₂P oder (0 2 2 1) in Bezug auf die gewöhnlichen 4 Axen.

Bestimmung von v.

Erste Methode. v liegt in der Zone MvrP′. Die Indices von v seien $1, \frac{2-n}{n}, \frac{1}{m}$. Die Indices von M sind 1 1 0, die von P′ sind $1\,\bar{1}\,1$. Mithin ergibt sich vermöge der Zonengleichung: $m = \frac{n}{n-1}$ oder $n = \frac{m}{m-1}$. Die Gleichung von v ist:

$$\cos vx = \frac{n\sqrt{3}}{2-n} \cos vy = mc \cos vz$$

$$\frac{2-n}{n\sqrt{3}} = \frac{\cos vy}{\cos vx} \text{ und } mc = \frac{\cos vx}{\cos vz}$$

Da die Indices von P gleich 1 1 1 sind, so ist die Gleichung von P

$$\cos Px = \sqrt{3} \cos Py = c \cos Pz$$

Aus dem Dreieck Pxz (Fig. 49) folgt

$$\cos Px = \sin Pz \cos 30$$

mithin ist

$$\sin Pz \cos 30 = c \cos Pz$$

woraus

$$\operatorname{tg} Pz = \frac{c}{\cos 30}$$

Daraus folgt

$$Pz = 29^{0}\,59'\,42'' \text{ mithin } PM = 60^{0}\,0'\,18'' = P'M'$$

Aus dem Dreieck P′M′M (Fig. 49) folgt

$$\sin M'M = \operatorname{ctg} P'MM' \operatorname{tg} M'P'$$

woraus, da $M'M = 60^{0}$ ist,

$$P'MM' = 63^{0}\,26'\,22''$$

Aus den sphärischen Dreiecken vMy und vMx folgt

$$\cos vy = \cos Mv \cos 60 - \sin Mv \sin 60 \cos vMx$$
$$\cos vx = \cos Mv \cos 30 + \sin Mv \sin 30 \cos vMx$$

Da cos 60 = sin 30 und sin 60 = cos 30 ist, so folgt

$$\frac{\cos vy}{\cos vx} = \frac{\cos Mv \sin 30 - \sin Mv \cos 30 \cos vMx}{\cos Mv \cos 30 + \sin Mv \sin 30 \cos vMx}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} 30 - \operatorname{tg} Mv \cos vMx}{1 + \operatorname{tg} Mv \cos vMx \operatorname{tg} 30}$$

Setzt man

a) $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} Mv \cos vMx$, so ist

$$\frac{2-n}{n\sqrt{3}} = \frac{\cos vy}{\cos vx} = \operatorname{tg}(30 - \varphi), \text{ mithin}$$

b) $$\frac{2-n}{n} = \sqrt{3} \operatorname{tg}(30 - \varphi) = \operatorname{tg} 60 \operatorname{tg}(30 - \varphi)$$

Da $Mv = 180 - M : v$, so findet sich

$$n = \frac{3}{2} \text{ mithin } m = 3$$

folglich

$v = 3P\frac{3}{2}$ oder (1 3 2 1) (bezogen auf die gewöhnlichen 4 Axen).

Zweite Methode. Setzt man in Gl. 17, S. 26

$$\cos w = \frac{3\,ll' + c^2 kk' + 3\,c^2 hh'}{\sqrt{3\,l^2 + c^2k^2 + 3\,c^2h^2}\,\sqrt{3\,l'^2 + c^2k'^2 + 3\,c^2h'^2}}$$

für w den Werth $Mv = 180 - M : v = 37^0\,45'$, für hkl die Werthe 1 1 0 und für h'k'l' die Werthe $1\ \frac{2-n}{n}\ \frac{1}{m}$ und für n den Werth $n = \frac{m}{m-1}$, so erhält man die Gleichung:

$$\cos w = \frac{(2m-1)\,c}{\sqrt{4\,c^2\,(m^2 - m + 1) + 3}}$$

woraus folgt

$$\operatorname{ctg} w = \frac{c\,(2m-1)}{\sqrt{3}\,\sqrt{1+c^2}}$$

woraus

$$2m - 1 = \frac{\operatorname{ctg} Mv \,.\, \sqrt{3}\,\sqrt{1+c^2}}{c}$$

Die Combination weist mithin auf:

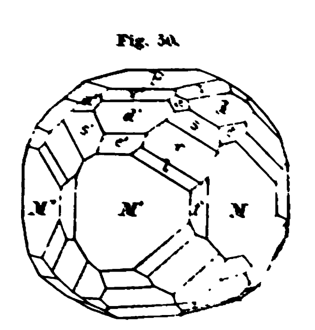
$$\begin{array}{cccccc} \infty P & .\ 0P & .\ P & .\ 2P & .\ 2P2 & .\ 3P\frac{3}{2} \\ M & .\ z & .\ P & .\ d & .\ r & .\ v \end{array}$$

Zweites Beispiel (Apatit) [1].

Die Fig. 50 repräsentirt eine zehnzählige Combination des Apatites. Wählt man d zur Grundpyramide, so ist
d die Pyramide P
e und v sind Pyramiden mP
P ist der basische Hauptschnitt oP
M das Prisma ∞ P
s und a sind Deuteropyramiden mP2
l und r sind Tritopyramiden $\pm \left[\frac{mPn}{2}\right]$
f das Deuteroprisma ∞ P2

Bekannt ist der Winkel
$d : d' = 142^\circ\, 15'\, 20''$
(der Polkantenwinkel der Grundpyramide).

Fig. 50.



Berechnung des Axenverhältnisses der Grundpyramide.

Aus Gl. 1, S. 121:

$$\cos hx = \text{tg } 60 \text{ ctg } \frac{Z}{2} \text{ und } mc = \text{ctg } hx$$

folgt, wenn man $m = 1$ und $Z = 142^\circ\, 15'\, 20''$ setzt:

$$c = 0{,}7346$$

Die x-Axe geht durch die Kante, die M' mit M'' bildet.

Aus dem Zonenverbande können alle Formen ermittelt werden.

Bestimmung von a.

a liegt in der Zone d'ad.

Indices von d': 1 1 1
Indices von d: 0 2 1
Indices von a: $\frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{1}{m}$ oder m, 3m, 2

Setzt man diese Werthe in die Zonengleichung 4, S. 8, so ergibt sich $m = 1$. Mithin ist
$a = P2$ oder $(\bar{1}\ 1\ 2\ 2)$ (bezogen auf die gewöhnlichen 4 Axen).

---

[1]) Vgl. Naumann, Lehrbuch der reinen und angewandten Krystallographie, Leipzig 1830, S. 504, Fig. 465.

Bestimmung von v.

v liegt in der Zone a′v′v

Die Indices von a′ sind: 1 0 1

Die Indices von v′ sind: $1\ 1\ \frac{1}{m}$ oder m m 1

Die Indices von v sind: $0\ 2\ \frac{1}{m}$ oder 0, 2 m, 1

Vermöge der Zonengleichung erhält man nun: $m = \frac{1}{2}$.

Mithin ist

$$v = \tfrac{1}{2} P \text{ oder } (\bar{1}\,0\,1\,2)$$

Bestimmung von s′.

s′ liegt in der Zone s′d′a

Indices von s′ seien $1\ 0\ \frac{1}{m}$ oder m 0 1

Indices von d′ sind 1 1 1

Indices von a sind 1 3 2

Mithin ergibt sich aus der Zonengleichung m = 2. Folglich ist

$$s' = {}_2P_2 \text{ oder } (1\ \dot{2}\ 1\ 1)$$

Bestimmung von e′.

Mit Hilfe des Goniometers hat man gefunden, dass die Flächen e′s e tautozonal sind.

Die Indices von e′ seien $1\ 1\ \frac{1}{m}$ oder m m 1

Die Indices von e sind $0\ 2\ \frac{1}{m}$ oder 0, 2 m, 1

Die Indices von s sind 2 6 2 oder 1 3 1

Vermöge der Zonengleichung erhält man m = 2. Mithin ist

$$e' = {}_2P \text{ oder } (0\ 2\ 2\ 1)$$

Bestimmung von l und r.

l und r liegen in der Zone M′lrs

Die Indices von M′ sind 1 1 0

Die Indices von s sind 1 3 1

Die Indices von l oder r seien $\frac{1}{n}\ \frac{2n-1}{n}\ \frac{1}{m}$

so muss vermöge der Zonengleichung $m = \frac{n}{n-1}$ und $n = \frac{m}{m-1}$ sein. Beide Formen l und r haben daher das Zeichen

$$+\left[\frac{mP\frac{m}{m-1}}{2}\right]$$

l liegt noch in der Zone e′lf

Die Indices von e′ sind 2 2 1

Die Indices von f sind 1 3 0

Die Indices von l sind $\frac{1}{n}\ \frac{2n-1}{n}\ \frac{n-1}{n}$

Mit Hilfe der Zonengleichung findet man $n = \frac{4}{3}$, mithin $m = 4$, folglich ist

$$l = +\left[\frac{4P\frac{4}{3}}{2}\right] \quad \text{Die Indices von l sind } \bar{1}\ 3\ 4\ 1$$

r liegt noch in der Zone d′rf, daher findet sich vermöge der Zonengleichung $m = 3$ und $n = \frac{3}{2}$, mithin ist

$$r = +\left[\frac{3P\frac{3}{2}}{2}\right] \quad \text{Indices von r: } (\bar{1}\ 2\ 3\ 1)$$

Die Combination weist mithin auf:

∞P	.	$\infty P2$	.	oP	.	$\frac{1}{2}P$	.	P
M′	.	f	.	P	.	v	.	d′
(0 1 1 0)	.	($\bar{1}$ 1 2 0)	.	(0 0 0 1)	.	($\bar{1}$ 0 1 2)	.	(0 1 1 1)

.	$2P$	.	$P2$	.	$2P2$	.	$+\left[\frac{4P\frac{4}{3}}{2}\right]$	.	$+\left[\frac{3P\frac{3}{2}}{2}\right]$
.	e′	.	a	.	s′	.	l	.	r
.	(0 2 2 1)	.	($\bar{1}$ 1 2 2)	.	(1 2 1 1)	.	($\bar{1}$ 3 4 1)	.	($\bar{1}$ 2 3 1)

Drittes Beispiel (Kalkspath) [1].

Die Fig. 51 a repräsentirt eine siebenzählige rhomboëdrische Combination des Kalkspaths. Wählt man P zum Grundrhomboëder, so ist

P das Rhomboëder R
d das Prisma ∞ R
t und r sind 2 Skalenoëder m R n
e, φ und f sind 3 negative Rhomboëder — m R

Die x-Axe geht durch die Kante, in welcher d und d'' sich schneiden (Fig. 51 a).

Fig. 51.

Fig. 51 a.

Die Fig. 51 repräsentirt eine stereographische Projection, soweit sie zur Berechnung erwünscht ist.

Bekannt ist der Polkantenwinkel des Rhomboëders P: $105^0\ 5'$ (Fig. 51 a).

Ferner kennt man den Winkel f : d' = $153^0\ 7'$ (Fig. 51 a).

Aus der Gl. 2, S. 134

$$\sin gz = \text{ctg}\ 60\ \text{ctg}\ \frac{Z}{2} \text{ und } mc = \text{tg}\ 60\ \text{tg}\ gz$$

folgt, wenn man $Z = 105^0\ 5'$ und $m = 1$ setzt:

$$c = 0{,}8543$$

---

[1]) Naumann, Lehrbuch d. reinen u. angewandten Krystallographie, Bd. 1, S. 500, Fig. 461.

Bestimmung von e.

e liegt in der Zone PeP' (Fig. 51), lässt sich mithin vermöge der Zonengleichung ermitteln, wenn man für P die Indices 1 1 1, für P' die Indices $\bar{1}$ 1 1 und für e die Indices $0\,2\,\frac{1}{m}$ oder $0\,2m\,1$ setzt. Man findet $m = \frac{1}{2}$, mithin ist

$$e = -\tfrac{1}{2}R \quad \text{Indices von e: } (\bar{1}\,0\,1\,2)$$

Bestimmung von f.

Erste Methode. Die Indices von f seien $0\,2\,\frac{1}{m}$ oder $0, 2m, 1$, so ist die Gleichung von f:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos fd' = cm \sin fd'$$

woraus

$$m = \frac{\sqrt{3}}{2c}\operatorname{ctg} fd' = \frac{\sin 60 \operatorname{ctg} fd'}{c}$$

Nun ist $fd' = 180 - f : d' = 26^{0}\,53$. Daher ergibt sich $m = 2$. Mithin ist

$$f = -2R \quad \text{Indices von f: } (\bar{2}\,0\,2\,1)$$

Zweite Methode. Setzt man in der Gleichung

$$\cos w = \frac{3ll' + c^2kk' + 3c^2hh'}{\sqrt{3l^2 + c^2k^2 + 3c^2h^2}\,\sqrt{3l'^2 + c^2k'^2 + 3c^2h'^2}}$$

für hkl die Indices von f: $0\,2m\,1$, für $h'k'l'$ die Indices von d': 0 1 0, so ergibt sich die Gleichung

$$\cos fd' = \frac{2mc}{\sqrt{4m^2c^2 + 3}}$$

woraus

$$\operatorname{ctg} fd' = \frac{2mc}{\sqrt{3}}$$

woraus

$$m = \frac{\sqrt{3}\operatorname{ctg} fd'}{2c} = \frac{\sin 60 \operatorname{ctg} fd'}{c}$$

Bestimmung von r'.

r' liegt in den zwei Zonen r'fr'' und r'Pe' (Fig. 51), wird mithin mit Hilfe der Zonengleichung bestimmt.

Die Indices von r' seien $\frac{1}{n}\ \frac{2n-1}{n}\ \frac{1}{m}$

Die Indices von e' sind $1\ \bar{1}\ 2$

Die Indices von P sind 1 1 1

Die Indices von r'' sind $\frac{\bar{1}}{n}\ \frac{2n-1}{n}\ \frac{1}{m}$

Man findet $n = \frac{3}{2}$ und $m = 3$, mithin ist

$$r' = \frac{3P\frac{3}{2}}{2} \quad \text{Indices von } r' \text{ sind: } \bar{1}\,2\,3\,1$$

Da $\frac{mPn}{2} = \frac{m'n'P\frac{2n'}{n'+1}}{2}$ äquivalent $m'Rn'$ ist (S. 138), so ist in unserem Falle $m'n' = 3$ und $\frac{2n'}{n'+1} = \frac{3}{2}$. Daraus folgt $n' = 3$ und $m' = 1$, mithin ist

$$\frac{3P\frac{3}{2}}{2} \text{ gleichwerthig mit } R3.$$

Bestimmung von t.

t liegt in der Zone Pte

Sind die Indices von t: $\frac{1}{n}\ \frac{2n-1}{n}\ \frac{1}{m}$, so folgt vermöge der Zonengleichung $n = \frac{m}{2m-1}$

Da die Combinationskante von t und r' in Fig. 51a horizontal ist, so muss t die x-Axe in derselben Entfernung schneiden, in der diese von r' geschnitten wird; mithin muss n in der letzten Gleichung $= \frac{3}{2}$ sein; alsdann folgt $m = \frac{3}{4}$; folglich ist

$$t = \frac{\frac{3}{4}P\frac{3}{2}}{2} \text{ äquivalent } \tfrac{1}{4}R3 \quad \text{Indices von t sind: } \bar{1}\,2\,3\,4$$

Bestimmung von φ.

φ liegt in der Zone $\varphi t t'$ (Fig. 51a). Sind die Indices von $\varphi: 0\,2\,\frac{1}{m}$, so ergibt sich $m = \frac{5}{4}$

Mithin ist

$\varphi = -\frac{5}{4} R$ Indices von φ sind: $\bar{5}\,0\,5\,4$

Die Combination weist mithin auf:

$R3$	.	$\frac{1}{4} R3$	.	∞R	.	$-\frac{5}{4} R$	.	$-\frac{1}{2} R$
r′	.	t	.	d	.	φ	.	e
$(\bar{1}\,2\,3\,1)$	.	$(\bar{1}\,2\,3\,4)$	.	$(0\,1\,1\,0)$	.	$(\bar{5}\,0\,5\,4)$	.	$(\bar{1}\,0\,1\,2)$

.	$-2R$	.	R
.	f	.	P
.	$(\bar{2}\,0\,2\,1)$	.	$(0\,1\,1\,1)$

Viertes Beispiel (Eisenglanz[1]).

Die Fig. 52a repräsentirt eine fünfzählige Combination. Wählt man R zum Grundrhomboëder, so lehrt eine allgemeine Bestimmung, dass

v und s zwei Rhomboëder mR
n eine Pyramide zweiter Ordnung mP2
g ein Skalenoëder mRn ist.

Fig. 52.

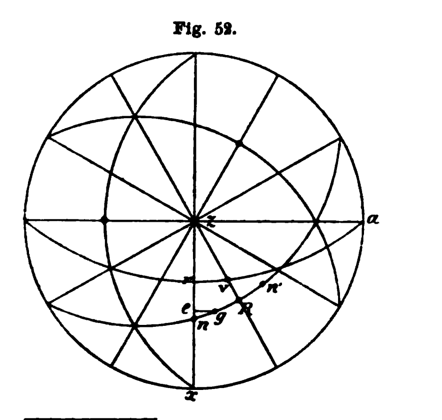
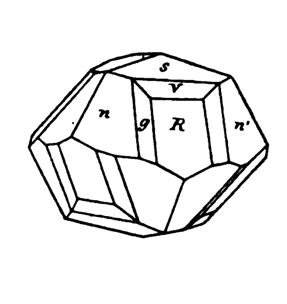


Fig. 52a.



[1]) Naumann, Lehrbuch d. reinen u. angewandten Kryst. Bd. 1, S. 503, Fig. 464.

Die Fig. 52 repräsentirt eine stereographische Projection derjenigen Flächen, deren Berechnung eine correcte Projection wünschenswerth erscheinen lässt.

Bekannt ist der Randkantenwinkel X des Grundrhomboëders R. Er ist $93^0 50'$.

Bekannt sind ferner die Winkel

$$R : v = 165^0 51' \text{ (Fig. 52a)}$$
$$R : s = 143^0 54'$$
$$R : g = 163^0 42'$$

Aus den Gl. 1 Seite 134

$$\sin gz = \operatorname{ctg} 60 \operatorname{tg} \frac{X}{2}$$

$$mc = \operatorname{tg} 60 \operatorname{tg} gz .$$

folgt, wenn man $X = 94^0$ und $m = 1$ setzt:

$$c = 1{,}359$$

Bestimmung von v.

Erste Methode. Die Indices von R sind 1 1 1; die Gleichung von R ist

$$\cos Rx = \sqrt{3} \cos Ra = c \cos Rz$$

Aus dem sphärischen Dreieck Rxz folgt

$$\cos Rx = \sin Rz \cos 30$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$\operatorname{tg} Rz = \frac{c}{\cos 30}$$

woraus

$$Rz = 57^0 29' 30''$$

Es ist $vz = Rz - Rv = 43^0 20' 30''$, denn

$$Rv = 180 - R : v$$

Die Indices von v seien $1\ 1\ \frac{1}{m}$ oder $m\ m\ 1$, so ist die Gleichung von v:

$$\cos vx = \sqrt{3} \cos va = mc \cos vz$$

woraus folgt

$$mc = \frac{\cos vx}{\cos vz}$$

Aus den sphärischen Dreiecken v r x und v r z folgt

$$\cos vx = \cos rv \cos rx$$

und

$$\cos vz = \cos rv \cos rz$$

Aus beiden Gleichungen folgt durch Division:

$$\frac{\cos vx}{\cos vz} = \frac{\cos rx}{\cos rz} = \frac{\sin rz}{\cos rz} = \operatorname{tg} rz$$

Mithin ist

$$m = \frac{\operatorname{tg} rz}{c}$$

Aus dem sphärischen Dreieck v r z folgt $\cos 30 = \operatorname{tg} rz \operatorname{ctg} zv$ folglich

$$m = \frac{\cos 30 \,.\, \operatorname{tg} zv}{c}$$

Setzt man für z v und c die oben gefundenen Werthe, so ergibt sich $m = 0{,}6014 = \frac{3}{5}$ annähernd. Mithin ist

$$v = \tfrac{3}{5} R \quad \text{Indices von v: } 0\,3\,3\,5$$

Ebenso ergibt sich

$$s = \tfrac{1}{4} R \quad \text{Indices von s: } (0\,1\,\dot{1}\,4)$$

Zweite Methode. Setzt man in die Gl. 17, S. 26

$$\cos w = \frac{3ll' + c^2kk' + 3c^2hh'}{\sqrt{3l^2 + c^2k^2 + 3c^2h^2}\,\sqrt{3l'^2 + c^2k'^2 + 3c^2h'^2}}$$

für h k l die Indices von R : 1 1 1 für h′ k′ l′ die Indices von v : m m 1, so ergibt sich

$$\cos w = \frac{3 + 4\,mc^2}{\sqrt{4c^2 + 3}\,\sqrt{4m^2c^2 + 3}}$$

woraus

$$\sin w = \frac{2c\sqrt{3}\,(1 - m)}{\sqrt{4c^2 + 3}\,\sqrt{4m^2c^2 + 3}}$$

Aus beiden Gleichungen erhält man

$$\operatorname{ctg} w = + \frac{4mc^2 + 3}{2c\sqrt{3}\,(1 - m)}$$

Daraus ergibt sich

$$1 - m = \frac{4c^2 + 3}{4c^2 + 2c\sqrt{3}\operatorname{ctg} w}$$

Setzt man für w seinen Werth 14° 9′, so erhält man

$$1 - m = 0{,}4$$

mithin

$$m = 0{,}6 = \frac{3}{5}$$

Bestimmung von n.

n liegt in der Zone ngRn′ ergibt sich mithin aus der Zonengleichung, wenn man für R die Indices 1 1 1, für n die Indices m o 1 und für n′ die Indices $\frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{1}{m}$ oder m, 3 m, 2 setzt. Man findet $m = \frac{4}{3}$, mithin ist

$n = \frac{4}{3} P_2$ Die Indices von n sind 2 4ˋ2 3

Bestimmung von g.

Erste Methode. g liegt in der Zone ngR. Die Indices von g seien: $1\ \frac{2-n}{n}\ \frac{1}{m}$. Vermöge der Zonengleichung ergibt sich alsdann $m = \frac{2n}{n+1}$. Die Indices von g sind nunmehr

$$1\ \frac{2-n}{n}\ \frac{n+1}{2n} \text{ oder } 2n,\ 2(2-n),\ n+1.$$

Die Gleichung von g ist:

$$\cos gx = \frac{n\sqrt{3}}{2-n} \cos ga = \frac{2nc}{n+1} \cos gz$$

Daraus folgt

$$\frac{n\sqrt{3}}{2-n} = \frac{\cos gx}{\cos ga} \text{ oder } \frac{2nc}{n+1} = \frac{\cos gx}{\cos gz}$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck nRz findet man

$$Rn = 25^\circ 57' 30'' \text{ und } znR = 74^\circ 25'$$

Da $Rg = 180 - R : g = 16^\circ 18'$ ist, so ergibt sich

$$gn = 9^\circ 39' 30''$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck nge findet man nun

$$en = 2^{\circ}37'$$

Aus der Gleichung von $n : \frac{3}{4} \cos nx = c \cos nz$ oder $\frac{3}{4} \sin nz = c \cos nz$ folgt $\operatorname{tg} nz = \frac{4c}{3}$. Daraus ergibt sich

$$nz = 61^{\circ}6' \text{ folglich } ez = nz - ne = 58^{\circ}29'$$

Aus den rechtwinkligen sphärischen Dreiecken xge und gez folgt

$$\cos gx = \cos eg \sin ez$$
$$\cos gz = \cos eg \cos ez$$

Durch Division erhält man aus beiden Gleichungen

$$\operatorname{tg} ez = \frac{\cos gx}{\cos gz}$$

Nun ist

$$\frac{\cos gx}{\cos gz} = \frac{2nc}{n+1}$$

folglich ist

$$\frac{2n}{n+1} = \frac{\operatorname{tg} ez}{c}$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{2n}{n+1} = 1{,}2 \text{ mithin } n = \frac{3}{2} \text{ folglich } m = \frac{6}{5}$$

Mithin ist

$g = \frac{\frac{6}{5} P \frac{3}{2}}{2}$ äquivalent $\frac{2}{5}$ R3 Die Indices von g sind 2 6 4 5

Zweite Methode. Setzt man in der Gleichung

$$\cos w = \frac{3ll' + c^2kk' + 3c^2hh'}{\sqrt{3l^2 + c^2k^2 + 3c^2h^2}\ \sqrt{3l'^2 + c^2k'^2 + 3c^2h'^2}}$$

für hkl die Indices von R : 1 1 1 und für h'k'l' die Indices von g:

$$1 \quad \frac{2-n}{n} \quad \frac{n+1}{2n}$$

so erhält man die Gleichung:

$$\cos w = \frac{(n+1)\sqrt{4c^2+3}}{\sqrt{3(n+1)^2 + 16c^2(n^2-n+1)}}$$

woraus

$$\sin w = \frac{(n-1)\,c\,\sqrt{12}}{\sqrt{3\,(n+1)^2 + 16\,c^2\,(n^2 - n + 1)}}$$

Durch Division der beiden Gleichungen erhält man:

$$\operatorname{ctg} w = \frac{(n+1)\,\sqrt{4\,c^2 + 3}}{(n-1)\,c\,\sqrt{12}}$$

woraus folgt

$$\frac{n+1}{n-1} = \frac{c\,\sqrt{12}\,\operatorname{ctg} w}{\sqrt{4\,c^2 + 3}}$$

Setzt man in dieser Gleichung $w = 16^0\,18'$, so erhält man $\frac{n+1}{n-1} = 5$ mithin $n = \frac{3}{2}$, wie oben.

Die Combination weist mithin auf:

$$R \,.\, \tfrac{4}{3} P_2 \,.\, \tfrac{1}{4} R \,.\, \tfrac{3}{5} R \,.\, \tfrac{2}{5} R_3$$

$$R \,.\, n \,.\, s \,.\, v \,.\, g$$

Fünftes Beispiel (Bergkrystall).

Die Fig. 53 a repräsentirt eine sechszählige tetartoëdrische Combination des Quarzes. Wählen wir R zum Grundrhomboëder, so ist

Fig. 53.

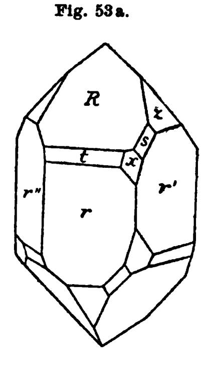


Fig. 53 a.

z ein Rhomboëder — mR

s eine trigonale Pyramide $\frac{m P_2}{4}$ r

x ein trigonales Trapezoëder $\frac{mPn}{4}$ r

t ein Rhomboëder mR

r das Prisma ∞R

Die x-Axe geht durch die Kante, in welcher sich r und r'' schneiden. Die Fig. 53 gibt eine stereographische Projection der Combination.

Bekannt ist der Winkel an der Polkante des Grundrhomboëder: $94^0 15'$.

Ferner kennt man (s. Fig. 53a) die Winkel:

$t : r = 168^0 52'$ in der Zone Rtr
$x : r = 168^0$ „ „ „ rxs
$R : z = 133^0 44'$

Berechnung der Länge der Hauptaxe.

Aus den Gleichungen $\sin gz = \text{ctg } 60 \text{ ctg } \frac{Z}{2}$ und $mc = \text{tg } 60 \text{ tg } gz$ folgt, wenn man $m = 1$ und $Z = 94^0 15'$ setzt:

$$c = 1,1$$

Bestimmung von z.

Die Indices von z sind $0\,2\,\frac{1}{m}$ oder 0, 2m, 1

Die Gleichung von z ist:

$$\frac{\sqrt{3} \cos zr'}{2} = \frac{mc \cos za''}{1} = mc \sin zr'$$

woraus

$$m = \frac{\sqrt{3} \text{ ctg } zr'}{2c} = \frac{\sin 60 \text{ ctg } zr'}{c} = \frac{\sin 60 \text{ tg } za''}{c}$$

Man findet za'', wenn man das rechtwinklige Dreieck, dessen Hypotenuse a''z ist und dessen eine Kathete $\frac{Rz}{2}$ (Fig 53) ist, berechnet. Alsdann ergibt sich $m = 1$

Mithin ist

$z = -R$ Die Indices von z sin

Bestimmung von s.

s liegt in der Zone Rsr′, kann mithin vermöge der Zonengleichung bestimmt werden. Die Indices von R sind 1 1 1, die von r′ sind 0 1 0 und die von s $\frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{1}{m}$ oder m 3 m 2. Man findet m = 2. Mithin ist

$$s = \frac{{}_2P_2}{4}\,r \quad \text{Die Indices von s sind: } \bar{1}\,1\,2\,1$$

Bestimmung von t.

Die Indices von t seien $1\ 1\ \frac{1}{m}$ oder m m 1, so ist die Gleichung von t

$$\cos ta = \sqrt{3}\cos tr' = c\,m\cos ta''$$

Daraus folgt

$$m = \frac{\cos ta}{c\cos ta''}$$

ta ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck tar

$$\cos ta = \cos tr \cos 30$$

Mithin ist

$$m = \frac{\cos tr\cos 30}{c\cos ta''} = \frac{\operatorname{ctg} tr\,.\cos 30}{c}$$

Man findet m = 4. Mithin ist

$$t = {}_4R \quad \text{Die Indices von t sind: } 0\,4\,4\,1$$

Dasselbe Resultat erhält man auch mit Hilfe der Gl. 17, S. 26.

Bestimmung von x.

Erste Methode. x liegt in der Zone rxs. Die Indices von x seien $\frac{1}{n}\ \frac{2n-1}{n}\ \frac{1}{m}$. Die Indices von r sind 1 1 0, die von s sind 1 3 1. Vermöge der Zonengleichung ergibt sich nun $n = \frac{m}{m-1}$. Die Indices von x sind mithin

$$\frac{m-1}{m}\ \frac{m+1}{m}\ \frac{1}{m} \quad \text{oder } m-1,\ m+1,\ 1.$$

Die Gleichung von x ist

$$\frac{\cos xa}{m-1} = \frac{\sqrt{3}\cos xr'}{m+1} = c\cos xa''$$

Daraus folgt

$$\frac{m+1}{m-1} = \frac{\sqrt{3}\cos xr'}{\cos xa}$$

Aus den sphärischen Dreiecken xar und xrr' folgt

$$\cos xa = \cos xr \cos 30 + \sin xr \sin 30 \cos xra$$
$$= \cos xr \cos 30 - \sin xr \sin 30 \cos xrr'$$
$$\cos xr' = \cos xr \cos 60 + \sin xr \sin 60 \cos xrr'$$

Aus beiden Gleichungen folgt durch Division und Reduction

$$\frac{\cos xr'}{\cos xa} = \frac{\operatorname{tg} 30 + \operatorname{tg} xr \cos xrr'}{1 - \operatorname{tg} xr \cos xrr' \operatorname{tg} 30}.$$

Setzt man

$$\operatorname{tg} xr \cos xrr' = \operatorname{tg} \varphi$$

so ist

$$\frac{\cos xr'}{\cos xa} = \operatorname{tg}(30+\varphi)$$

Mithin ist

$$\frac{m+1}{m-1} = \sqrt{3}\operatorname{tg}(30+\varphi)$$

Der Winkel xrr' ergibt sich aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck zrr' vermöge der Gleichung

$$\operatorname{tg} xrr' = \frac{\operatorname{tg} zr'}{\sin 60} = \frac{\operatorname{ctg} za''}{\sin 60}$$

Demnach hat man der Reihe nach folgende Gleichungen zu berechnen:

$$\operatorname{tg} xrr' = \frac{\operatorname{ctg} za''}{\sin 60} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} xr \cos xrr'$$

$$\frac{m+1}{m-1} = \sqrt{3}\operatorname{tg}(30+\varphi)$$

Man findet $m = 6$. Mithin ist $n = \frac{6}{5}$. Folglich ist

$x = \frac{6P\frac{6}{5}}{4}$ Die Indices von x sind: $\bar{1}\,5\,6\,1$

Zweite Methode. Setzen wir in der Gleichung

$$\cos w = \frac{3\,l\,l' + c^2 k k' + 3\,c^2 h h'}{\sqrt{3\,l^2 + c^2 k^2 + 3\,c^2 h^2}\,\sqrt{3\,l'^2 + c^2 k'^2 + 3\,c^2 h'^2}}$$

für hkl die Indices von x: m — 1, m + 1, 1, für h'k'l' die Indices von r: 1 1 0, so erhalten wir die Gleichung

$$\cos w = \frac{c\,(2\,m - 1)}{\sqrt{3 + 4\,c^2\,(m^2 - m + 1)}}$$

Daraus folgt

$$\operatorname{ctg} w = \frac{c\,(2\,m + 1^2)}{\sqrt{3}\,\sqrt{1 + c^2}}$$

Daraus folgt

$$2\,m - 1 = \frac{\sqrt{3}\,\operatorname{ctg} w \sqrt{1 + c^2}}{c}$$

Setzt man w = xr = 180 — x : r = 12°, so ist

$$2\,m - 1 = 11, \text{ woraus } m = 6$$

Die Combination weist auf:

$$+ R \;.\; - R \;.\; \infty R \;.\; \frac{{}_2P_2}{4} \;.\; \frac{{}_6P_{\frac{6}{5}}}{4} \;.\; {}_4R$$

R . z . r . s . x . t

Sechstes Beispiel (Rothgiltigerz) [1].

Die Fig. 54a repräsentirt eine vierzehnzählige Combination des Rothgiltigerzes von Freiberg. Wählt man p zum Grundrhomboëder, so sind

q und z' zwei Rhomboëder $-mR$

M ist das trigonale Prisma $\frac{\infty R}{2}$

R ein ditrigonales Prisma $\infty R n$

N das Deuteroprisma ∞P_2

a, k und g sind drei Skalenoëder $+\frac{mPn}{2}$

i', r', l', s' und v sind fünf Skalenoëder $-\frac{mPn}{2}$

[1]) Vgl. Klein, Einleitung in die Krystallberechnung, Stuttgart 1876, S. 373, Taf. XII, Fig. 1.

Bekannt ist der Polkantenwinkel von $+$R. Er ist gleich 108° 42′.

Ferner kennt man

$$
\begin{aligned}
a' : p &= 164^\circ\ 5' \\
g : g' &= 171^\circ\,30' \\
g' : p &= 137^\circ\,38' \\
z' : i' &= 163^\circ\,40' \\
z' : l' &= 152^\circ\ 0' \\
l' : s' &= 173^\circ\,54' \\
r' : l' &= 171^\circ\,46' \\
q : z' &= 126^\circ\,50'
\end{aligned}
$$

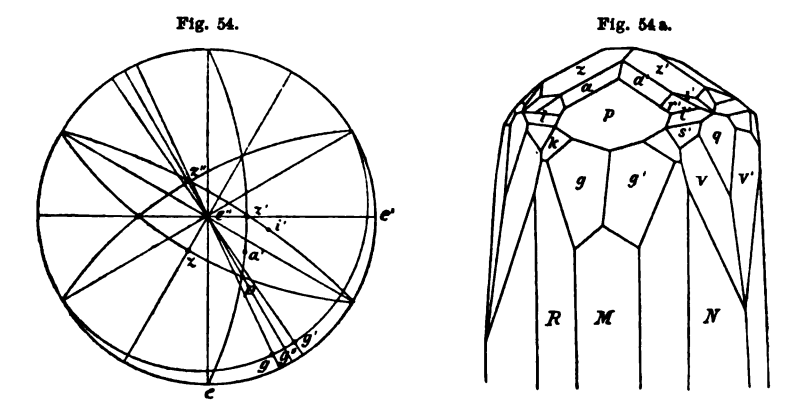


Fig. 54. Fig. 54a.

Die Fig. 54 gibt eine stereographische Projection, soweit sie zur Berechnung erwünscht ist.

Berechnung der Länge der Hauptaxe.

Aus den Gleichungen $\sin gz = \operatorname{ctg} 60 \operatorname{ctg} \frac{Z}{2}$ und $mc = \operatorname{tg} 60 \operatorname{tg} gz$ (S. 134) folgt für $m = 1$ und $Z = 108^\circ\,42'$

$$c = 0{,}78799$$

Berechnung von z′.

z′ liegt in der Zone epz′ (Fig. 54). Mithin ergibt sich $z' = -\frac{1}{2}$ R Die Indices von z′ sind: $\bar{1}\,0\,1\,2$

Berechnung von a′.

Erste Methode. Das Skalenoëder a′ liegt in der Zone p a′ z′.

Die Indices von p sind 1 1 1, die von z′ sind 0 2 2 oder 0 1 1, die von a′ sind $\frac{1}{n}\ \frac{2n-1}{n}\ \frac{1}{m}$. Mit Hilfe der Zonengleichung findet man $m = \frac{n}{2n-1}$. Die Indices von a′ sind mithin 1, 2 n — 1, 2 n — 1.

Die Gleichung von a′ ist

$$\cos a'e = \frac{\sqrt{3}\cos a'e'}{2n-1} = \frac{c}{2n-1}\cos a'e''$$

Daraus folgt

$$2n - 1 = \frac{\sqrt{3}\cos a'e'}{\cos a'e}$$

Aus dem sphärischen Dreieck a′ e e′ folgt

$$\cos a'e' = \sin a'e \cos a'ee'$$

Mithin

$$2n - 1 = \sqrt{3}\ \mathrm{tg}\ a'e \cos a'ee' = \mathrm{tg}\ 60\ \mathrm{tg}\ a'e \,.\, \cos a'ee'$$

Der Winkel a′e ist gleich a′p + pe. Für die Winkel pe und a′ee′ findet man leicht: pe = 54° 21 und a′ee′ = 65° 32′. Alsdann ergibt sich 2 n — 1 = 2, folglich

$$n = \frac{3}{2} \text{ und } m = \frac{3}{4}$$

Mithin ist

$$a' = + \frac{\frac{3}{4}P\frac{3}{2}}{2} \text{ äquivalent } \tfrac{1}{4}R3 \quad \text{Indices von } a': (\bar{1}\ 2\ 3\ 4)$$

Zweite Methode. Setzt man in der Gleichung

$$\cos w = \frac{3ll' + c^2kk' + 3c^2hh'}{\sqrt{3l^2 + c^2k^2 + 3c^2h^2}\sqrt{3l'^2 + c^2k'^2 + 3c^2h'^2}}$$

für hkl die Indices von p: 1 1 1 und für h′k′l′ die Indices von a′: 1, 2 n — 1, 2 n — 1, so erhält man:

$$\cos w = \frac{3(2n-1) + c^2 \,.\, 2(n+1)}{\sqrt{4c^2 + 3}\sqrt{3(2n-1)^2 + 4c^2(n^2 - n + 1)}}$$

woraus

$$\operatorname{ctg} w = \frac{2\,(n-1)\,(c^2+3)+3+4\,c^2}{(n-1)\,.\,2\,c\,\sqrt{3}\,\sqrt{c^2+3}}$$

Daraus folgt

$$n-1 = \frac{3+4\,c^2}{2\,c\,\sqrt{3}\,\sqrt{c^2+3}\,.\,\operatorname{ctg} w - 2\,(c^2+3)}$$

Setzt man hier $w = 164^0\,5'$, so erhält man

$$n = \frac{3}{2} \text{ (wie oben).}$$

Bestimmung von g'.

Erste Methode. Die Indices von g' seien $\frac{1}{n}\ \frac{2n-1}{n}\ \frac{1}{m}$
Die Gleichung von g' ist mithin

$$n \cos g'e = \frac{n\sqrt{3}}{2n-1} \cos g'e' = m c \cos g'e''$$

Hieraus folgt

$$2n-1 = \frac{\sqrt{3}\cos g'e'}{\cos g'e} \text{ und } m = \frac{n \cos g'e}{c \cos g'e''}$$

Aus der Fig. 54 ersieht man, dass $g'g'' = \frac{1}{2}\,gg' = 4^0\,15'$; ausserdem ist $pg' = 180 - p : g' = 42^0\,22'$

Man berechne zuerst das rechtwinklige sphärische Dreieck $pg'g''$. Man findet $pg'' = 42^0\,11'\,35''$, $\sphericalangle gpg'' = 6^0\,18'\,50''$ und $\sphericalangle pg'g'' = 85^0\,19'\,37''$. Leicht findet man auch $pe'' = 42^0\,18'$.

Nunmehr kennt man in dem sphärischen Dreieck $pg'e''$ folgende Stücke: $pg' = 42^0\,22'$, $pe'' = 42^0\,18'$ und $e''pg' = 180 - g'pg'' = 173^0\,41'\,10''$. Die Berechnung dieses Dreiecks liefert uns $g'e'' = 84^0\,30'\,20''$.

Aus dem sphärischen Dreieck $g'ee''$ finden wir $g'e = 34^0\,39'$ und aus dem sphärischen Dreieck $g'e''e'$ ergibt sich $g'e' = 55^0\,55'$.

Daher ergibt sich $2n - 1 = 1{,}18$, mithin $n = 1{,}09 = \frac{12}{11}$ annähernd und $m = 11{,}89 = 12$ annähernd. Mithin ist $g' = \frac{12\,P\frac{12}{11}}{2}$ äquivalent $10\,R\frac{6}{5}$. Die Indices von g' sind $\bar{1}\ 11\ 12\ 1$

Zweite Methode. Die zwei Zonen $g\,g'$ und $p\,e''$ (s. Fig. 54) schneiden sich in dem Punkte g''. Die Indices von g'' ergeben sich mithin vermöge der Zonengleichung aus den Indices von g: $1\ \frac{2-n}{n}\ \frac{1}{m}$, denen von g': $\frac{1}{n}\ \frac{2n-1}{n}\ \frac{1}{m}$, denen von p: 1 1 1 und denen von e'': 0 0 1. Man findet für g'' die Indices: $m(n+1)$, $m(n+1)$, $2n$.

Setzt man nun in die Gleichung

$$\cos w = \frac{3\,l l' + c^2 k k' + 3\,c^2 h h'}{\sqrt{3\,l^2 + c^2 k^2 + 3\,c^2 h^2}\,\sqrt{3\,l'^2 + c^2 k'^2 + 3\,c^2 h'^2}}$$

für $h\,k\,l$ die Indices von g': $\frac{1}{n}\ \frac{2n-1}{n}\ \frac{1}{m}$ und für $h'k'l'$ die Indices von g'': $m(n+1)$, $m(n+1)$, $2n$, so erhält man

$$\cos g''g' = \frac{\sqrt{3\,n^2 + m^2 c^2 (n+1)^2}}{\sqrt{3\,n^2 + 4\,m^2 c^2 (1 + n^2 - n)}}$$

woraus

$$\sin g''g' = \frac{m\,c\,(n-1)\sqrt{3}}{\sqrt{3\,n^2 + 4\,m^2 c^2 (1 + n^2 - n)}}$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$\text{a)}\quad \operatorname{tg} g''g' = \frac{m\,c\,(n-1)\sqrt{3}}{\sqrt{3\,n^2 + m^2 c^2 (n+1)^2}}$$

Setzen wir in die obige Gleichung für $h\,k\,l$ die Indices von p: 1 1 1 und für $h'k'l'$ die Indices von g': $\frac{1}{n}\ \frac{2n-1}{n}\ \frac{1}{m}$, so erhalten wir die Gleichung:

$$\cos g'p = \frac{3\,n + 2\,m\,c^2 (n+1)}{\sqrt{3 + 4\,c^2}\,\sqrt{3\,n^2 + 4\,m^2 c^2 (1 + n^2 - n)}}$$

Da $\cos g'g'' > \cos g'p$ ist, so kann man setzen:

$$\cos \varphi = \frac{\cos g'p}{\cos g'g''}$$

daraus folgt

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}\,[m\,c\,(n+1) - 2\,n\,c]}{\sqrt{3 + 4\,c^2}\,\sqrt{m^2 c^2 (n+1)^2 + 3\,n^2}}$$

und daraus

$$\text{b)}\ \frac{\sqrt{3+4c^2}\,.\,\sin\varphi}{\sqrt{3}} = \frac{mc\,(n+1)}{\sqrt{m^2c^2\,(n+1)^2+3n^2}}$$

$$-\frac{2nc\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,\sqrt{m^2c^2\,(n+1)^2+3n^2}}$$

Setzt man

$$\text{c)}\ \cos\alpha = \frac{mc\,(n+1)}{\sqrt{m^2c^2\,(n+1)^2+3n^2}}$$

so ist

$$\text{d)}\ \sin\alpha = \frac{n\sqrt{3}}{\sqrt{m^2c^2\,(n+1)^2+3n^2}}$$

Setzt man noch

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{2c}{\sqrt{3}}$$

so ergibt sich aus der Gl. b:

$$\frac{\sqrt{3+4c^2}\,.\,\sin\varphi}{\sqrt{3}} = \cos\alpha - \operatorname{tg}\delta\sin\varphi = \frac{\cos(\alpha+\delta)}{\cos\delta}$$

Daraus folgt

$$\cos(\alpha+\delta) = \frac{\cos\delta\,.\,\sin\varphi\,\sqrt{3+4c^2}}{\sqrt{3}}$$

oder da $\cos\delta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+4c^2}}$ ist, $\cos(\alpha+\delta) = \sin\varphi$

Aus Gl. a und Gl. c folgt

$$\frac{n+1}{n-1} = \frac{\cos\alpha\sqrt{3}}{\operatorname{tg} g''g'}$$

m erhält man durch Division der Gleichungen c und d.

Wir haben mithin, um m und n zu finden, der Reihe nach folgende Gleichungen zu berechnen:

$$1)\ \operatorname{tg}\delta = \frac{2c}{\sqrt{3}} \qquad 2)\ \cos\varphi = \frac{\cos g'p}{\cos g'g''}$$

$$3)\ \cos(\alpha+\delta) = \sin\varphi \qquad 4)\ \frac{n+1}{n-1} = \frac{\cos\alpha\sqrt{3}}{\operatorname{tg} g''g'}$$

$$5)\ m = \frac{n\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha}{(n+1)\,c}$$

Die Rechnung liefert

$\delta = 42^\circ\, 17'\, 40''$ $\quad \varphi = 42^\circ\, 22'$ $\quad \alpha + \delta = 47^\circ\, 48'\, 30''$

$$\frac{n+1}{n-1} = 23{,}2 \text{ und } m = 11{,}893 = 12 \text{ annähernd.}$$

Die Berechnung der übrigen Formen bietet keine Schwierigkeiten mehr. Wir deuten sie daher im Folgenden nur ganz kurz an.

Bestimmung von k.

Das Skalenoëder k ergibt sich aus dem Schnitt der zwei Zonen Mgk und kpa′z′ (Fig. 54a). Man findet

$$k = \frac{{}_3P_{\frac{3}{2}}}{2} \text{ äquivalent } R_3 \quad \text{Die Indices von k sind } 1\,3\,2\,1$$

Bestimmung von R.

Das ditrigonale Prisma R bildet mit dem Skalenoëder k horizontale Combinationskanten; daher ist

$$R = \frac{\infty R_{\frac{3}{2}}}{2} \quad \text{Die Indices von R sind } 1\ 3\ 2\ 0$$

Bestimmung von i′.

Das Skalenoëder i′ liegt in der Zone i′z′z″ (Fig. 54).

z″ ist in Fig. 54a nicht sichtbar. Daher muss vermöge der Zonengleichung $n = \frac{4\,m}{2\,m+1}$ sein.

Da die Indices von z′ 0 2 2, von z″ $\bar{1}\,\bar{1}\,2$ und von i′ $\frac{n-1}{n}\ \frac{n+1}{n}\ \frac{1}{m}$ sind, so kann man leicht z′e″, z′e′ und e″z′z″ finden. Vermöge der Gleichung von i′ ergibt sich dann $m = 1$, mithin $n = \frac{4}{3}$.

m ergibt sich auch aus der leicht abzuleitenden Gleichung

$$\alpha)\ 2\,m - 1 = \frac{4\,(3 + c^2)}{-c\sqrt{3}\,\sqrt{12 + c^2}\,.\,\text{ctg}\, z':i' - 3\,c^2}$$

Mithin ist

$$i' = -\frac{P_{\frac{4}{3}}}{2} \text{ äquivalent } -\tfrac{1}{2}R_2 \quad \text{Die Indices von i′ sind } \bar{3}\,1\,4\,4$$

Bestimmung von l'.

l' liegt in der Zone z'i'l'; mithin muss $n = \frac{4m}{2m+1}$ sein.

m ergibt sich aus der Gl. α, wenn man statt z' : i' setzt z' : l' = 152°. Man findet

$$m = \frac{3}{2}, \text{ mithin } n = \frac{3}{2}$$

l' liegt auch in der Zone lPl' und kann mithin auch ohne die Gl. α bestimmt werden. Es ist

$l' = -\frac{\frac{3}{2}P\frac{3}{2}}{2}$ äquivalent $-\frac{1}{2}R3$ Die Indices von l' sind $\bar{2}\,1\,3\,2$

Bestimmung von r' und s'.

Die beiden Skalenoëder r' und s' bilden mit l' horizontale Combinationskanten, folglich haben sie das Zeichen $-\frac{mP\frac{3}{2}}{2}$ Die Berechnung von m ist für beide Skalenoëder dieselbe. m ergibt sich aus der Gleichung

$$2m - 3 = \frac{9 + 21c^2}{-c\sqrt{21}\ \mathrm{ctg}\ l':s' - 7c^2}$$

Man findet $m = \frac{15}{8}$, folglich $n = \frac{3}{2}$. Mithin ist

$s' = -\frac{\frac{15}{8}P\frac{3}{2}}{2}$ äquivalent $-\frac{5}{8}R3$ Die Indices von s' sind $\overline{10}\,5\,15\,8$

Das m des Skalenoëders r' ergibt sich aus der Gleichung

$$2m - 3 = \frac{9 + 21c^2}{c\sqrt{21}\ \mathrm{ctg}\ r':l' - 7c^2}$$

$r' = -\frac{\frac{9}{8}P\frac{3}{2}}{2}$ äquivalent $-\frac{13}{8}R3$ Indices von r' sind $\bar{6}\,3\,9\,8$

Bestimmung von q.

Man bestimmt q aus dem Winkel q:z' = 126° 50'. Es ist

$$2m - 1 = \frac{3 + c^2}{-c\sqrt{3}\ \mathrm{ctg}\ q:z' - c^2}$$

Man findet m = 5. Mithin ist

$q = -5R$ Die Indices von q sind $\bar{5}\,0\,5\,1$

Bestimmung von v.

v liegt in der Zone Nvq und in der Zone g′vv′. Die letztere Zone ist durch das Reflexionsgoniometer constatirt worden. Man findet

$$v = -\frac{7P\frac{7}{6}}{2} \text{ äquivalent } -5R\tfrac{7}{5} \quad \text{Die Indices von v sind } \bar{6}\ 1\ 7\ 1$$

Die Combination weist mithin auf:

$$+R \;.\; -\tfrac{1}{2}R \;.\; -5R \;.\; \frac{\infty R}{2} \;.\; \frac{\infty R\frac{3}{2}}{2} \;.\; \infty P2$$
p . z′ . q . M . R . N

$$.\; \tfrac{1}{4}R3 \;.\; R3 \;.\; 10R\tfrac{6}{5} \;.\; -\tfrac{1}{2}R2 \;.\; -\tfrac{1}{2}R3 \;.\; -\tfrac{5}{8}R3$$
. a . k . g . i′ . l′ . s′

$$.\; -\tfrac{3}{8}R3 \;.\; -5R\tfrac{7}{5}$$
. r′ . v

Rhombisches System.

§. 17.

Berechnung der rhombischen Pyramide P.

In der Fig. 55 repräsentire e die Projection der rhombischen Pyramide P und es sei $eg = 90 - \frac{Y}{2}$ und $eh = 90 - \frac{X}{2}$. Die Indices von e sind 1 1 1, mithin ist die Gleichung der Fläche e, wenn man, wie üblich, $b = 1$ setzt:

$$a \cos ex = \cos ey = c \cos ez$$

Daraus

$$a = \frac{\cos ey}{\cos ex} \text{ und } c = \frac{\cos ey}{\cos ez}$$

Fig. 55.

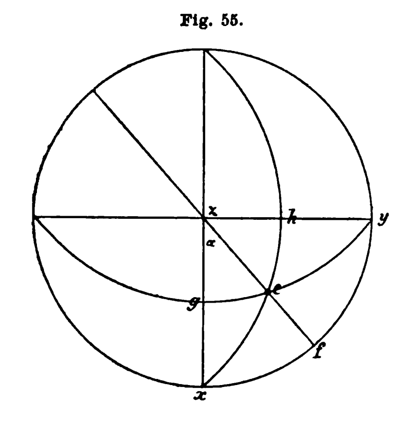
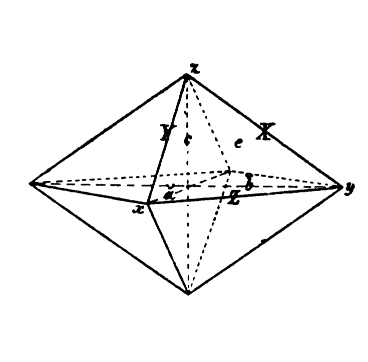


Fig. 55a.



a) Gegeben X und Y, gesucht a und c.

Da

$$ey = 90 - eg = \frac{Y}{2} \text{ und } ex = 90 - eh = \frac{X}{2}$$

ist, so folgt

$$a = \frac{\cos ey}{\cos ex} = \frac{\cos \frac{1}{2} Y}{\cos \frac{1}{2} X}$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck eyh folgt

$$\cos ey = \cos eh \cos hy = \cos eh \sin zh$$

woraus

$$\sin zh = \frac{\cos \frac{1}{2} Y}{\sin \frac{1}{2} X}$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck zhe folgt

$$\cos ez = \cos zh \sin \frac{1}{2} X$$

Nun ist

$$c = \frac{\cos ey}{\cos ez} = \frac{\cos \frac{1}{2} Y}{\cos zh \sin \frac{1}{2} X}$$

und da

$$\cos \frac{1}{2} Y = \sin \frac{1}{2} X \sin zh$$

ist, so folgt

$$c = \operatorname{tg} zh$$

Um daher a und c zu finden, hat man folgende Gleichungen zu berechnen:

1) $a = \frac{\cos \frac{1}{2} Y}{\cos \frac{1}{2} X}$ $\sin zh = \frac{\cos \frac{1}{2} Y}{\sin \frac{1}{2} X}$ $c = \operatorname{tg} zh$

b) Gegeben X und Z, gesucht a und c.

Es sei $ef = 90 - \frac{Z}{2}$, so folgt aus dem sphärischen Dreieck ezh

$$\cos ez = \cos eh \cos zh$$

woraus

$$\cos zh = \frac{\cos \frac{1}{2} Z}{\sin \frac{1}{2} X}$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ehy folgt

$$\cos ey = \cos eh \sin zh$$

Nun ist

$$c = \frac{\cos ey}{\cos ez} = \frac{\cos eh \sin zh}{\cos \frac{1}{2} Z} = \frac{\sin \frac{1}{2} X \sin zh}{\cos \frac{1}{2} Z} = \frac{\sin \frac{1}{2} X \sin zh}{\sin \frac{1}{2} X \cos zh}$$

folglich

$$c = \operatorname{tg} zh$$

Es ist

$$a = \frac{\cos ey}{\cos ex} = \frac{\cos eh \cos hy}{\cos \frac{1}{2} X} = \frac{\sin \frac{1}{2} X \sin zh}{\cos \frac{1}{2} X} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} X \sin zh$$

Um daher a und c zu finden, hat man zu berechnen:

2) $\cos zh = \frac{\cos \frac{1}{2} Z}{\sin \frac{1}{2} X}$ $c = \operatorname{tg} zh$ $a = \operatorname{tg} \frac{1}{2} X \sin zh$

c) Gegeben Y und Z, gesucht a und c.

Es ist

$$c = \frac{\cos ey}{\cos ez} = \frac{\cos \frac{1}{2} Y}{\cos \frac{1}{2} Z}$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck gez folgt

$$\sin ge = \sin ze \sin \alpha$$

woraus

$$\sin \alpha = \frac{\cos \frac{1}{2} Y}{\sin \frac{1}{2} Z}$$

Nun ist $a = \frac{\cos ey}{\cos ex} = \frac{\cos \frac{1}{2} Y}{\sin ez \cos \alpha} = \frac{\sin \frac{1}{2} Z \sin \alpha}{\sin \frac{1}{2} Z \cos \alpha}$

folglich $a = \operatorname{tg} \alpha$

Um daher a und c zu finden, hat man folgende Gleichungen zu berechnen:

3) $c = \frac{\cos \frac{1}{2} Y}{\cos \frac{1}{2} Z}$ $\sin \alpha = \frac{\cos \frac{1}{2} Y}{\sin \frac{1}{2} Z}$ $a = \operatorname{tg} \alpha$

Setzen wir in den vorstehenden Formeln mc statt c, so gelten sie für die Pyramide mP.

Setzen wir mc statt c und na statt a, so gelten sie für die Pyramide $m\breve{P}n$.

Setzen wir $\frac{mc}{n}$ statt c und $\frac{a}{n}$ statt a, so gelten sie für die Pyramide $m\bar{P}n$.

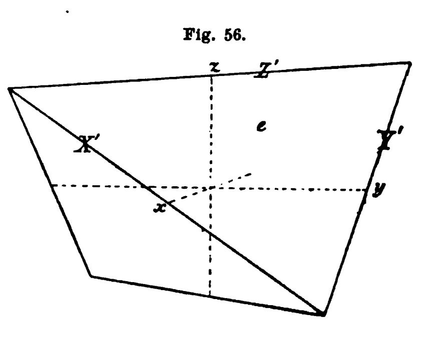
Setzt man in den Formeln 1 bis 3 $\frac{Z}{2} = 90$, so erhält man die für das Prisma ∞P geltenden Gleichungen.

§. 18.

Berechnung der rhombischen Sphenoide.

Den Polkantenwinkel (s. Fig. 56) der rhombischen Sphenoide bezeichnen wir durch Z′, den Kantenwinkel der längeren Mittelkante durch X′, den der kürzeren Mittelkante durch Y′. In der Fig. 55 repräsentire e die Projection der Sphenoidfläche e in Fig. 56. Repräsentirt e eine Fläche des Sphenoids $\frac{P}{2}$, so sind die Indices von e: 1 1 1 und die Gleichung von e ist, wenn man b = 1 setzt:

Fig. 56.



$$a \cos ex = \cos ey = c \cos ez$$

1) Gegeben X' und Z', gesucht a und c.

In der Fig. 55 ist

$$ex = 90 - \frac{X'}{2} \qquad ey = 90 - \frac{Y'}{2} \qquad ez = 90 - \frac{Z'}{2}$$

Ferner ist

$$a = \frac{\cos ey}{\cos ex} \text{ und } c = \frac{\cos ey}{\cos ez}$$

Aus dem sphärischen Dreieck exz folgt $\cos ex = \sin ze \cos z$

woraus $$\cos z = \frac{\cos ex}{\sin ez} = \frac{\sin \frac{1}{2} X'}{\cos \frac{1}{2} Z'}$$

Aus dem sphärischen Dreieck yez folgt

$$\cos ey = \sin z \sin ze = \sin z \cos \tfrac{1}{2} Z'$$

Man hat daher, um a und c zu finden, folgende Gleichungen zu berechnen:

$$4) \left\{ \begin{array}{ll} \cos z = \dfrac{\sin \frac{1}{2} X'}{\cos \frac{1}{2} Z'} & a = \dfrac{\sin z \cos \frac{1}{2} Z'}{\sin \frac{1}{2} X'} \\ & c = \sin z \operatorname{ctg} \frac{1}{2} Z' \end{array} \right.$$

2) Gegeben X' und Y', gesucht a und c.

Aus dem sphärischen Dreieck exy folgt

$$\cos ey = \sin ex \cos exy \text{ woraus}$$

$$\cos exy = \frac{\sin \frac{1}{2} Y'}{\cos \frac{1}{2} X'}$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck exf folgt

$$\sin ef = \sin ex \sin exy = \cos ez$$

Um a und c zu finden, hat man folgende Gleichungen zu berechnen:

$$5) \left\{ \begin{array}{ll} a = \dfrac{\sin \frac{1}{2} Y'}{\sin \frac{1}{2} X'} & \cos exy = \dfrac{\sin \frac{1}{2} Y'}{\cos \frac{1}{2} X'} \\ c = \dfrac{\sin \frac{1}{2} Y'}{\cos \frac{1}{2} X' \sin exy} & \end{array} \right.$$

3) Gegeben Y' und Z', gesucht a und c.

Aus dem sphärischen Dreieck eyz (Fig. 55) folgt

$$\cos ey = \sin ez \sin z$$

Daraus folgt $\sin \alpha = \frac{\sin \frac{1}{2} Y'}{\cos \frac{1}{2} Z'}$

Aus dem sphärischen Dreieck e x z folgt

$$\cos ex = \sin ez \cos \alpha = \cos \tfrac{1}{2} Z' \cos \alpha$$

Um daher a und c zu finden, hat man folgende Gleichungen zu berechnen:

$$6)\ c = \frac{\sin \frac{1}{2} Y'}{\sin \frac{1}{2} Z'} \qquad \sin \alpha = \frac{\sin \frac{1}{2} Y'}{\cos \frac{1}{2} Z'} \qquad a = \frac{\sin \frac{1}{2} Y'}{\cos \frac{1}{2} Z' \cos \alpha}$$

§. 19.

Berechnung complicirter Combinationen.

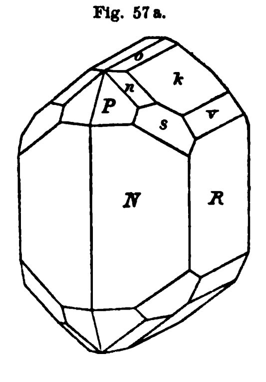
Erstes Beispiel (Aragonit).[1])

Die Fig. 57a repräsentirt eine achtzählige Combination des Aragonits. Wählt man P zur Grundpyramide, so ist

N das Prisma ∞P
R das Brachypinakoid $\infty\breve{P}\infty$
o, k, v sind Domen m$\breve{P}\infty$
n und s sind Pyramiden m$\breve{P}$n.

Fig. 57.

Fig. 57a.



Die Fig. 57 ist eine stereographische Projection der Combination. Die Vertheilung der Flächen und die wichtigsten Zonen treten hier dem Beobachter klar vor Augen.

[1]) Vergl. Naumann, Lehrbuch d. reinen u. angewandten Krystallographie, 1830, Bd. 2, S. 41, Fig. 518.

Bekannt sind die Polkantenwinkel X und Y der Pyramide P

$$X = 93^\circ 36' 40'' \qquad Y = 129^\circ 32' 20''$$

Bekannt ist ferner der Winkel o:k = 164° 2′

Aus den Gl. 1 Seite 168 erhält man

$$a = 0{,}6228 \text{ und } c = 0{,}7207$$

Mithin ist

$$a : b : c = 0{,}6228 : 1 : 0{,}7207$$

Bestimmung von k.

k liegt in der Zone Pnk (Fig. 57). Setzt man in der Zonengleichung für P die Indices 1 1 1, für P′ die Indices $\bar{1}$ 1 1 und für k die Indices 0 1 $\frac{1}{m}$ oder 0 m 1, so erhält man m = 1. Mithin ist

$$k = \breve{P}\infty$$

Bestimmung von s.

s liegt in den Zonen Nsk und PsR. Die Indices von s seien $\frac{1}{n}$ 1 $\frac{1}{m}$, die von R sind 0 1 0, die von N sind 1 1 0, die von k sind 0 1 1. Mit Hilfe der Zonengleichung erhält man m = n = 2. Mithin ist

$$s = {}_2\breve{P}_2$$

Bestimmung von n.

Die Pyramiden n und s schneiden sich in horizontalen Combinationskanten, mithin sind die Flächen snr′ (Fig. 57) tautozonal (r′ = oP), folglich n = 2. Da n auch noch in der Zone Pnk liegt, so ergibt sich m = 1. Mithin ist

$$n = \breve{P}_2$$

Bestimmung von v.

Das Doma liegt in der Zone svs′ (Fig. 57). Als Indices von v erhält man daher 0 2 1. Mithin ist

$$v = {}_2\breve{P}\infty$$

Bestimmung von o.

Erste Methode. Die Indices von o seien $0\,1\,\frac{1}{m}$ oder $0\,m\,1$.

Die Gleichung von o ist mithin

$$\frac{1}{m}\cos oR = c\cos or' = c\sin oR$$

$$m = \frac{\operatorname{ctg} oR}{c} = \frac{\operatorname{ctg}(ok + kR)}{c}$$

Die Gleichung von k ist

$$\cos kR = c\sin kR \qquad \operatorname{ctg} kR = c$$

$$kR = 54^0 13' \qquad ok = 15^0 58 \text{ folglich } oR = 70^0 11$$

Nunmehr ergibt sich $m = 0{,}5$. Folglich ist

$$o = \tfrac{1}{2}\breve{P}\infty$$

Zweite Methode. Setzen wir in die Gl. 14 S. 26

$$\cos PP' = \frac{(ab)^2 ll' + (ac)^2 kk' + (bc)^2 hh'}{\sqrt{(ab)^2 l^2 + (ac)^2 k^2 + (bc)^2 h^2}\,\sqrt{(ab)^2 l'^2 + (ac)^2 k'^2 + (bc)^2 h'^2}}$$

Für hkl die Indices von $o: 0m1$ und für $h'k'l'$ die Indices von $k: 0\,1\,1$, so erhalten wir, wenn $b = 1$ gesetzt wird, die Gleichung

$$\cos ok = \frac{mc^2 + 1}{\sqrt{1 + c^2}\,\sqrt{1 + m^2c^2}}$$

woraus

$$\sin ko = \frac{c\,(1 - m)}{\sqrt{c^2 + 1}\,\sqrt{m^2c^2 + 1}}$$

(weil $m < 1$)

Aus beiden Gleichungen folgt

$$\operatorname{ctg} ko = \frac{mc^2 + 1}{c\,(1 - m)}$$

$$m = \frac{c\operatorname{ctg} ko - 1}{c^2 + c\operatorname{ctg} ko} = 0{,}5$$

wie oben.

Die Combination weist folgende Formen auf:

$$P\,.\,\infty P\,.\,\infty\breve{P}\infty\,.\,\breve{P}\infty\,.\,2\breve{P}2\,.\,\breve{P}2\,.\,\tfrac{1}{2}\breve{P}\infty\,.\,2\breve{P}\infty$$

P. N. R . k . s . n . o . v

Zweites Beispiel (Weissbleierz) [1].

Die Fig. 58a repräsentirt eine zehnzählige Combination des Weissbleierzes von der Grube Taininsk im Nertschinsker Berg-

Fig. 58.

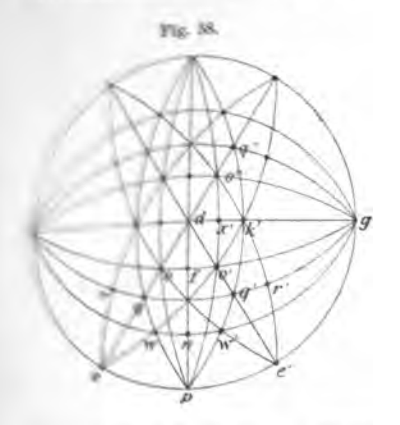
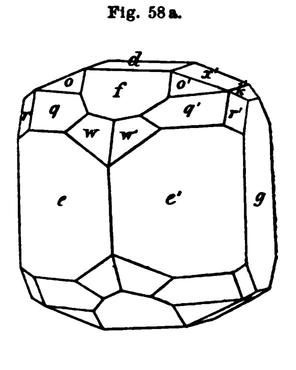


Fig. 58 a.



revier, Transbaikalien. Wählen wir q' zur Grundpyramide, so ist

o' eine Pyramide m P
e' das Prisma ∞ P
f ein Makrodoma $m \bar{P} \infty$
x' und k' sind Brachydomen $m \breve{P} \infty$
r' ist eine Pyramide $m \breve{P} n$
w' eine Pyramide $m \bar{P} n$
g das Brachypinakoid $\infty \breve{P} \infty$
d das basische Pinakoid o P

Bekannt sind folgende Winkel:

e : e' = 117° 14' 10" (Fig. 58 a)	w : w' = 148° 36'
d : k' = 144° 8'	w' : f = 140° 43'
d : f = 149° 20'	

Vermittelst des Goniometers wurde die Tautozonalität der Flächen q'k'q" (Fig. 58) constatirt.

[1]) Vergl. N. v. Kokscharow, Mat. zur Mineralogie Russlands, Bd. VI, p. 100 u. f., Taf. LXXIX, Fig. 13; vergl. auch C. Klein, Einleitung in die Krystallberechnung, S. 199, Taf. VI, Fig. 1.

Die Fig. 58 ist eine stereographische Projection der Combination. Die Vertheilung der Flächen und der Zonenverband treten dem Auge klar hervor.

Bestimmung von k'.

Die Indices von k' seien $0\ 1 \frac{1}{m}$ oder $0\, m\, 1$. Da k' in der Zone q' k' q'' (Fig. 58) liegt, so ergibt sich $m = 1$. Mithin ist

$k' = \breve{P}\infty$ Die Indices von k' sind 0 1 1

Bestimmung des Axenverhältnisses.

Das Dreieck q' d k' (Fig. 58) lässt sich berechnen; denn man kennt darin $d k' = 180 - d : k' = 35^0 52'$; ferner ist $d k' q' = 90$ und $q' d k' = g e' = 90 - p e' = 90 - \frac{1}{2} e e' = 58^0 37' 5''$

Man findet

$$q' d = 54^0 14' 10'' \qquad k' q' = 43^0 50' 45''$$

folglich

$$q' p = 90 - k' q' = 46^0 9' 15''$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck k' g q' erhält man nun

$$g q' = 65^0 0' 14''$$

Die Gleichung der Fläche q' ist, wenn man $b = 1$ setzt:

$$a \cos q' p = \cos q' g = c \cos q' d$$

daraus

$$a = \frac{\cos q' g}{\cos q' p} \qquad c = \frac{\cos q' g}{\cos q' d}$$

Die Rechnung ergibt

$$a = 0{,}6098 \text{ und } c = 0{,}7229$$

Mithin ist

$$a : b : c = 0{,}6098 : 1 : 0{,}7229$$

Bestimmung von f.

Die Indices von f seien $m\, 0\, 1$, so ist die Gleichung von f

$$\frac{a}{m} \cos f p = c \cos f d$$

folglich ist

$$m = \frac{a}{c} \operatorname{tg} fd$$

Die Rechnung ergibt

$$m = \frac{1}{2}$$

Mithin ist

$$f = \tfrac{1}{2} \bar{P} \infty$$

Bestimmung von o′.

Die Indices von o′ seien $1 \frac{1}{n} \frac{1}{m}$. Da o′ in der Zone e′q′o′ liegt, so muss vermöge der Zonengleichung $n = 1$ sein. Da o′ auch in der Zone o f o′ liegt, so ergibt sich $m = \frac{1}{2}$. Mithin ist

$$o' = \tfrac{1}{2} P$$

Bestimmung von x′.

x′ liegt in der Zone o′x′o″ (Fig. 58). Die Indices von x′ seien $0\ 1 \frac{1}{m}$ oder $0\ m\ 1$. Mit Hilfe der Zonengleichung findet man $m = \frac{1}{2}$. Mithin ist

$$x' = \tfrac{1}{2} \breve{P} \infty$$

Berechnung von w′

Erste Methode. Die Indices von w′ seien $1 \frac{1}{n} \frac{1}{m}$. Die Gleichung von w′ ist daher, wenn $b = 1$ gesetzt wird,

$$a \cos w'p = n \cos w'g = c\,m \cos w'd$$

Daraus folgt

$$n = \frac{a \cos w'p}{\cos w'g} \qquad m = \frac{a \cos w'p}{c \cos w'd}$$

Man kennt die Winkel

$w'a$ [illegible] $90 - \frac{1}{2}$ w′ : w [illegible] 13′ 42″ und w′ [illegible] = 59′ 17″

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck w′nf erhält man nun

$$fn = 36^\circ 29' 10''$$

und da $$df = 30^\circ 40'$$

ist, so ist $$nd = 67^\circ 9' 10''$$

und $$pn = 22^\circ 50' 50''$$

Nunmehr berechne man das sphärische Dreieck w′np. Man findet

$$pw' = 27^\circ 28' 50'' \text{ und } npw' = 35^\circ 54'$$

Aus den beiden rechtwinkligen sphärischen Dreiecken w′np und w′nd folgt

$$\cos w'p = \cos w'n \cos np$$
$$\cos w'd = \cos w'n \cos nd$$

Durch Division erhält man

$$\frac{\cos w'p}{\cos w'd} = \frac{\cos pn}{\cos nd}$$

Mithin ist

$$m = \frac{a \cos pn}{c \cos nd} = 2$$

Aus dem sphärischen Dreieck gw′p folgt

$$\cos w'g = \sin w'p \sin npw'$$
$$w'g = 74^\circ 18'$$

Nunmehr erhält man

$$n = \frac{a \cos w'p}{\cos w'g} = 2$$

Mithin ist

$$w' = {}_2\bar{P}_2$$

Zweite Methode. Setzt man in der Gl. 14, S. 26 für hkl die Indices von n: m01, für h′k′l′ die Indices von w′: $1 \frac{1}{n} \frac{1}{m}$, so erhält man

$$\cos nw' = \frac{n \sqrt{a^2 + m^2 c^2}}{\sqrt{N}}$$

woraus

$$\sin nw' = \frac{amc}{\sqrt{N}}$$

worin $$N = m^2 c^2 n^2 + m^2 c^2 a^2 + a^2 n^2$$

Setzt man in dieselbe Gleichung für h k l die Indices von f: 1 0 2, für h′k′l′ die Indices von w′: $1 \frac{1}{n} \frac{1}{m}$, so erhält man

$$\cos w' f = \frac{n (m c^2 + 2 a^2)}{\sqrt{c^2 + 4 a^2} \sqrt{N}}$$

Aus dieser und der vorhergehenden Gleichung folgt

$$\frac{\cos w' f \sqrt{c^2 + 4 a^2}}{\cos n w'} = \frac{m c^2}{\sqrt{a^2 + m^2 c^2}} + \frac{2 a^2}{\sqrt{a^2 + m^2 c^2}}$$

Setzt man

$$\frac{m c}{\sqrt{a^2 + m^2 c^2}} = \cos \varphi$$

so ist

$$\sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + m^2 c^2}}$$

Durch Einführung dieser Grössen in die vorhergehende Gleichung ergibt sich

$$\frac{\cos w' f \sqrt{c^2 + 4 a^2}}{c \cos n w'} = \cos \varphi + \frac{2 a}{c} \sin \varphi = \cos \varphi + \operatorname{ctg} \alpha \sin \varphi$$

wenn man

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{2 a}{c}$$

setzt. Nunmehr folgt

$$\sin (\alpha + \varphi) = \frac{\cos w' f \sqrt{c^2 + 4 a^2} . \sin \alpha}{c \cos n w'}$$

Es ist aber $\sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{c^2 + 4 \alpha^2}}$, mithin

$$\sin (\alpha + \varphi) = \frac{\cos w' f}{\cos n w'}$$

und da

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{m c}{a} \text{ und } \operatorname{tg} n w' = \frac{a m c}{n \sqrt{a^2 + m^2 c^2}} = \frac{a}{n} \cos \varphi$$

ist, so hat man der Reihe nach folgende Gleichungen zu berechnen:

1) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{2 a}{c}$ 2) $\sin (\alpha + \varphi) = \frac{\cos w' f}{\cos n w'}$

3) $m = \frac{a \operatorname{ctg} \varphi}{c}$ 4) $n = \frac{a \cos \varphi}{\operatorname{tg} n w'}$

Bestimmung von r′.

Die Indices von r′ seien $\frac{1}{n}\,1\,\frac{1}{m}$. Da r′ in den beiden Zonen q′r′g und e′r′k′ liegt, so erhält man mit Hilfe der Zonengleichung m = n = 2. Folglich ist

$$r' = {}_2\breve{P}_2$$

Die Combination weist auf:

$$\begin{matrix} P \,.\, \infty P \,.\, \infty\breve{P}\infty \,.\, \breve{P}\infty \,.\, \tfrac{1}{2}\breve{P}\infty \,.\, \tfrac{1}{2}\bar{P}\infty \,.\, \tfrac{1}{2}P \,.\, {}_2\bar{P}_2 \,.\, {}_2\breve{P}_2 \,.\, oP \\ q' \,.\, e' \,.\, g \,.\, k' \,.\, x' \,.\, f \,.\, o' \,.\, w' \,.\, r' \,.\, d \end{matrix}$$

Drittes Beispiel (Asparagin) [1].

Die Fig. 59a repräsentirt eine vierzählige Combination des Asparagins. Eine allgemeine Bestimmung lehrt, dass

o das Sphenoid $-\frac{P}{2}$

p das Prisma ∞P

c der basische Hauptschnitt oP

und

q ein Brachydoma $m\breve{P}\infty$ ist.

Fig. 59.

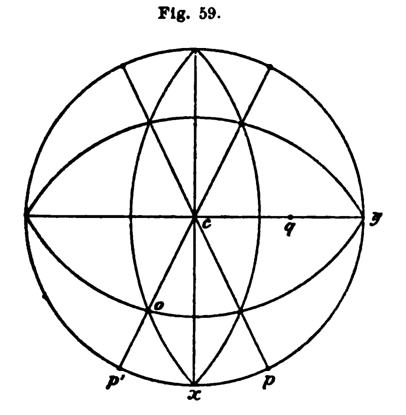
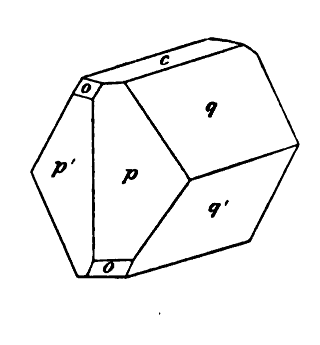


Fig. 59a.



[1]) Vergl. Groth, Poggendorffs Ann. 135, 651 und auch Groth, Physikalische Krystallographie, 1876, S. 372, Fig. 445.

...verhältnisses.

... die Gleichung von p ist

... p y

... = 0.4737

... Die Gleichung von ... ist

... = e cos ...

... = a ... cos p' x

... die Gleichung von q

... m = 2. Mithin ist

Viertes Beispiel (Bleivitriol) [1].

Die Fig. 60 a repräsentirt eine elfzählige Combination des Bleivitriols von Anglesea. In dieser Fig. 60 a läuft die Brachydiagonale nicht, wie in den vorhergehenden Figuren, auf den Beobachter zu, sie geht hier von links nach rechts und die

Fig. 60.

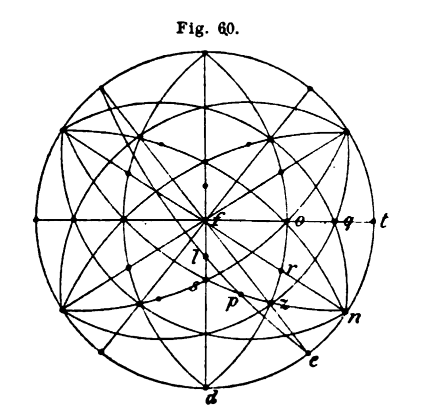
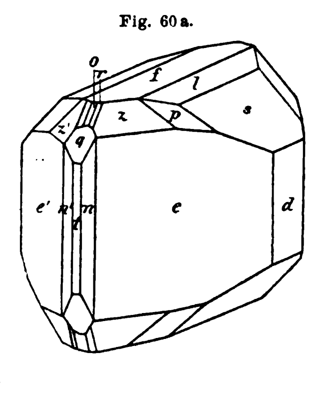


Fig. 60 a.



Makrodiagonale läuft auf den Beobachter zu. In Fig. 60 dagegen geht die Makrodiagonale wie gewöhnlich von links nach rechts. Sehen wir z als Grundpyramide an, so ist

e das Prisma ∞P
f der basische Hauptschnitt oP
t das Brachypinakoid $\infty \breve{P} \infty$
s und l sind Makrodomen $m \bar{P} \infty$
r ist eine Pyramide $m \breve{P} n$
n ein Prisma $\infty \breve{P} n$
o und q sind Brachydomen $m \breve{P} \infty$
p ist eine Pyramide $m \bar{P} n$

Bekannt sind die Winkel (s. Fig. 60a)

$s : d = 129^0 24'$	$l : d = 112^0 19'$
$e' : e = 76^0 16' 30''$	$o : f = 127^0 47' 45''$
$q : f = 104^0 30'$	$o : r = 153^0 18'$
$p : s = 155^0 11'$	$p : e = 142^0 57'$

[1]) Vergl. V. v. Lang, Versuch einer Monographie des Bleivitriols. Sitzungsber. der k. k. Akademie der Wissensch., 1859, Bd. 36, Fig. 80. Vergl. auch Klein, Einleitung in die Krystallberechnung, S. 206, Taf. VI, Fig. 6.

Die Fig. 6 ist eine stereographische Projection der Combination, in welcher die ... der Flächen und die ... Zonen ...

Im Folgenden ... wenn sie keine Schwierigk...

Bes... und Ermittelung des ...nisses.

... zonal; daher ergibt sich

... r = $\breve{P}$n

... dass $\operatorname{tg} \frac{1}{2}$ (e′ : e) = a = 0,78516

... 0 1 1 und der Gleichung von o

... (180 — o : f) = 1,2894.

... daher

... 0,7852 : 1 : 1,2894

... von s und l.

... 1 0 $\frac{1}{m}$, so folgt leicht

$$m = \frac{a \operatorname{ctg} sd}{c}$$

... auch zur Berechnung von l, nur ... Man findet

... P ∞ und l = ¼ $\bar{P}$ ∞

Bestimmung von q.

... 0 1 $\frac{1}{m}$, so folgt aus der Gleichung

$$\ldots = \frac{\operatorname{tg}(180 - q:f)}{c}$$

q ... P ∞

Bestimmung von n'.

n' liegt in der Zone n'qz. Die Indices von n' seien $\frac{\bar{1}}{n} 1\ 0$ oder $\bar{1}\,n\,0$, so folgt vermöge der Zonengleichung $n = 2$. Mithin ist

$$n' = \infty \breve{P}_2$$

Bestimmung von r.

Die Indices von r seien $\frac{1}{n}\ 1\ 1$, so findet man leicht

$$n = \frac{c}{\sqrt{1 + c^2}} \frac{\text{ctg or}}{a} = \frac{c}{\sqrt{1 + c^2}} \frac{(\text{tg}\,180 - 0:r)}{a} = 2$$

Mithin ist

$$r = \breve{P}_2$$

Bestimmung von p.

p liegt in den Zonen zps und epl (Fig. 60 a). Daher ergibt sich leicht

$$p = \tfrac{3}{4}\bar{P}\tfrac{3}{2}$$

Wüsste man nicht, dass p in diese beiden Zonen fiele, so könnte es nach folgender Methode berechnet werden (s. Fig. 60). Gegeben $pe = 37^0\,3'$ und $ps = 24^0\,49'$.

Aus den Indices von e d und l berechne man die Winkel

$$ed = 38^0\,8' \text{ und } le = 72^0\,37'$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck led folgt nun

$$led = 75^0\,46'\,20'' = \alpha$$

Sind die Indices von p: $1\ \frac{1}{n}\ \frac{1}{m}$, so ist die Gleichung von p:

$$a \cos pd = n \cos pt = mc \cos pf$$

Daraus folgt

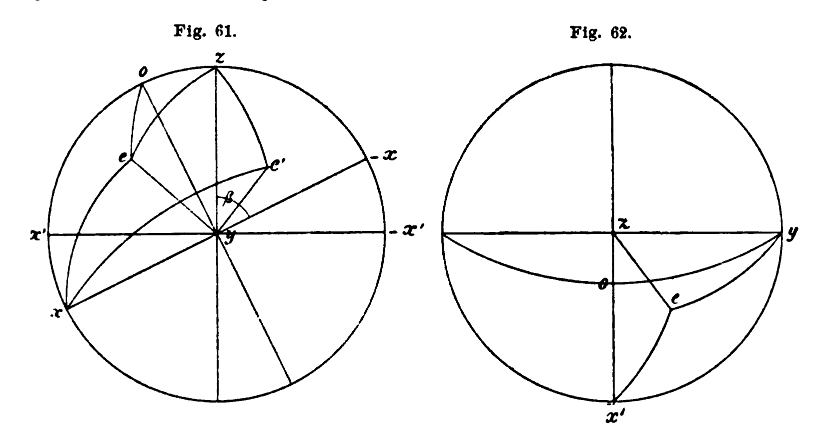
$$n = \frac{a \cos pd}{\cos pt}$$

Aus den sphärischen Dreiecken ped und pet folgt

$$\cos pd = \cos pe \cos ed + \sin pe \sin ed \cos \alpha$$
$$\cos pt = \cos pe \cos et - \sin pe \sin et \cos \alpha$$

verschiedenen Winkel bildet. Diese Gleichung lässt sich leicht in folgender Weise zu einer brauchbaren umgestalten.

Die Fig. 61 repräsentirt diesmal eine Projection auf die xz-Ebene. Es sei $zyx = 180 - \beta$ und es repräsentire e die Projection der Krystallfläche hkl und o die der Krystallfläche 0 0 1 (basischer Hauptschnitt), so ist $xyo = 90$. Es sei ferner yx' senkrecht auf yz.



Aus dem sphärischen Dreieck eyx folgt

$$\cos ex = \sin ey \cos eyx = \sin ey \sin eyo$$

Aus dem sphärischen Dreieck eyz folgt

$$\cos ez = \sin ey \cos eyz = \sin ey \sin eyx'$$

Setzt man diese Werthe für cos ex und cos ez in die obige Gleichung der Krystallfläche e, so erhält man für die Krystallfläche e die neue Gleichung:

$$1) \ \frac{a}{h} \sin eyo = \frac{b}{k} \operatorname{ctg} ey = \frac{c}{l} \sin eyx'$$

Dieselbe Gleichung gilt auch für die Fläche e', deren Indices $\bar{h}kl$ sind; nur muss man in der Gl. 1 e' statt e schreiben. Der Beweis wird mit Hilfe der beiden Dreiecke e'yx und e'yz geführt und bietet keine Schwierigkeiten, wesshalb wir ihn übergehen. Die Gleichung der Fläche e', deren Indices $\bar{h}kl$ sind, ist demnach nicht

$$= \frac{c}{l} \sin e' y x'$$

$$= \frac{c}{l} \sin e' y x'$$

...eren Indices $\bar{h} k l$ sind, ist

$$= \frac{c}{l} \sin e y x'$$

...ch für die Fläche e, deren Indices ...nur leicht.

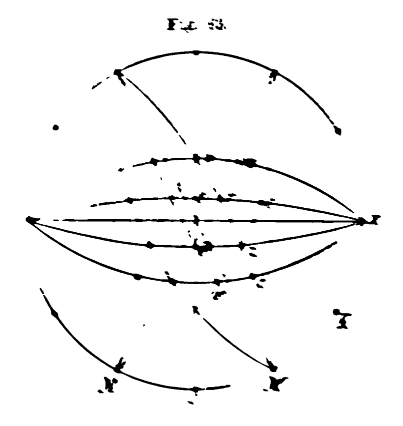
...complicirter Krystalle.

§. 21.

...Beispiel (Hornblende vom Vesuv).

...repräsentirt eine zwölfzählige Combination der ...Vesuv. Die Fig. 64 a ist eine Projection auf ...recht zur Prismenfläche M. Die Klinodiagonale

Fig. 63.



...auf den Beobachter zu, die negative Hemipyramide liegt ...daher gegenüber. Wir wählen r zur positiven Grund...pyramide und p zum basischen Hauptschnitt. Die Fig. 63 ist ...graphische Projection der Combination.

Es ist s das Orthopinakoid $\infty P \bar{\infty}$
q eine negative Hemipyramide $- mPn$
e ein positives Hemiorthodoma $+ mP\bar{\infty}$
x das Klinopinakoid $\infty P \grave{\infty}$
c eine positive Hemipyramide $+ mP\grave{n}$
t eine negative Hemipyramide $- mP\grave{n}$
d' ein Klinodoma $mP\grave{\infty}$
M das Prisma ∞P
k ein Prisma $\infty P\grave{n}$
l eine positive Hemipyramide $+ mPn$

Fig. 64.

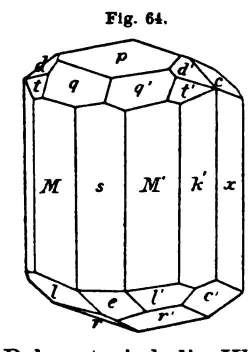
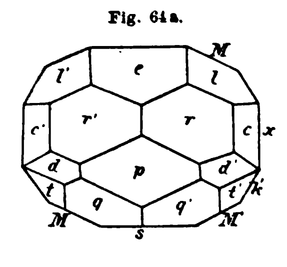


Fig. 64 a.



Bekannt sind die Winkel[1]):

$p : s = 104^0\, 58'$ $\quad$ $M : M' = 124^0\, 11'$
$r : r' = 148^0\, 28'$ $\quad$ $x : k' = 147^0\, 49'$
$c : x = 130^0\, 15'$

Hieraus ergeben sich für die Fig. 63 die Winkel:

$ps = 75^0\ 2'$ $\quad$ $tr = 15^0\, 46'$ $\quad$ $sM' = 27^0\, 54'\, 30''$
$xk' = 32^0\, 11'$ $\quad$ $cx = 49^0\, 45'$

Bestimmung des Axenverhältnisses.

Es ist (Fig. 63) $ps = \beta = 75^0\, 2'$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck spM' folgt (s. Fig. 63)

$$\operatorname{tg} spM' = \frac{\operatorname{tg} sM'}{\sin \beta}$$

---

[1]) Die Fundamentalwinkel sind der Tabelle aus der Mineralogie von Des-Cloizeaux, 1862, T. I, p. 77 und 78 entnommen. Vergl. auch Klein, Einleitung in die Krystallberechnung, S. 250, Taf. VII, Fig. 7 u. 7 a.

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck ptr folgt

$$\sin pt = \operatorname{ctg} tpr \operatorname{tg} tr = \operatorname{ctg} spM' \operatorname{tg} tr$$

mithin

$$\sin pt = \frac{\sin \beta \operatorname{tg} tr}{\operatorname{tg} sM'}$$

Die Gleichung der Fläche r ist, da $rxp = pt$ ist:

$$a \sin pt = b \operatorname{ctg} rx = c \sin rxs$$

woraus, wenn wir, wie üblich, $b = 1$ setzen, folgt:

$$a = \frac{\operatorname{ctg} rx}{\sin pt} = \frac{\operatorname{tg} tr}{\sin pt} \text{ und } c = \frac{\operatorname{ctg} rx}{\sin rxs} = \frac{\operatorname{tg} tr}{\sin (\beta + tp)}$$

Daraus

$$a = 0{,}54826 \text{ und } c = 0{,}29377$$

Daher

$$a : b : c = 0{,}54826 : 1 : 0{,}29377$$

Bestimmung von k'.

Die Indices der Fläche k' sind: $\frac{1}{n}\ 1\ 0$. Die Gleichung der Fläche k' ist mithin:

$$a n \sin k'xp = \operatorname{ctg} k'x \text{ und, da } k'xp = ps = \beta \text{ ist,}$$

$$n = \frac{\operatorname{ctg} k'x}{a \sin \beta}$$

Hieraus folgt $n = 3$, mithin ist

$$k' = \infty P \breve{3}$$

Bestimmung von e.

e liegt in der Zone $x\,e\,r$. Vermöge der Zonengleichung folgt, dass e das Zeichen $mP\breve{m}$ haben muss.

Die Indices von e sind $-\frac{1}{m}\ 1\ \frac{1}{m}$, mithin ist die Gleichung von e:

$$a m \sin exp = \operatorname{ctg} ex = c m \sin exs$$

$$m = \frac{\operatorname{ctg} ex}{c \sin exs} = \frac{\operatorname{ctg} ex}{c \sin (\beta - pt)}$$

Daraus folgt $m = 3$, mithin ist

$$e = -3P\breve{3}$$

Alle übrigen Flächen ergeben sich aus dem Zonenverbande vermöge der Zonengleichung.

Die Zone r d′M′ liefert $d' = 2P\grave{\infty}$

Die Zone e r d′ liefert $e = +2P\bar{\infty}$

Die Zonen M l r und x l e liefern $l = +2P$

Die Zonen M′q′p und q′d′c liefern $q' = -P$

Die Zonen t q q′ und t′d′r liefern $t' = -3P\grave{3}$

Die Combination weist mithin auf:

$$+P \, . \, oP \, . \, \infty P\bar{\infty} \, . \, -P \, . \, 2P\bar{\infty} \, . \, \infty P\grave{\infty} \, . \, 3P\grave{3} \, . \, -3P\grave{3}$$
r . p . s . q′ . e . x . c . t′

$$. \, 2P\grave{\infty} \, . \, \infty P \, . \, \infty P\grave{3} \, . \, 2P$$
. d′ . M . k . l′

Zweites Beispiel (Orthoklas) [1].

Die Fig. 65 a repräsentirt eine siebenzählige Combination des Orthoklases. Die Fig. 65 ist die stereographische Projection der Combination. Die Orthodiagonale geht von links nach

Fig. 65.

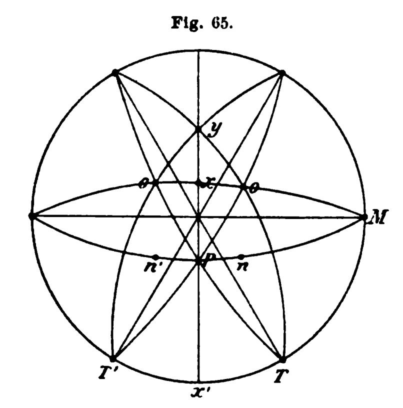
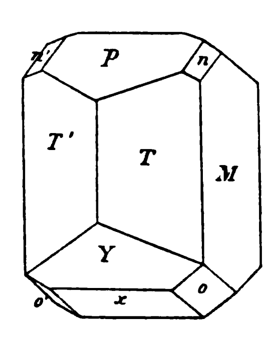


Fig. 65 a.



rechts, die Klinodiagonale gehe in der Fig. 65 a der Fläche P parallel, steige mithin vom Beobachter aus in die Höhe. Wählen wir o zur Grundpyramide, so ist o die positive Hemipyramide + P; ferner ist

---

[1]) Vergl. N. v. Kokscharow, Mat. z. Min. Russl., 1867, S. 115 u. 329 und G. v. Rath, Pogg. Ann., 1868, Bd. 135, S. 454.

P der basische Hauptschnitt,
T ein Prisma $\infty P \bar{n}$
n ein Klinodoma $m P \grave{\infty}$
M das Klinopinakoid $\infty P \grave{\infty}$
x und y sind Hemiorthodomen $+ m P \overline{\infty}$

Bekannt (s. Fig. 65 a) sind die Winkel

$$P : T = 112^\circ 13' \qquad T' : T = 118^\circ 47' \qquad o' : o = 126^\circ 17'$$
$$P : n = 153^\circ 30' \text{ und (s. Fig. 65) } Py = 80^\circ 18'$$

Bestimmung von T.

T liegt in der Zone oTp (s. Fig. 65 a); aus der Zonengleichung folgt n = 1, mithin ist

$$T = \infty P$$

Bestimmung des Axenverhältnisses und des Winkels β.

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck PTx' folgt, da $Px' = \beta$ ist,

$$\cos \beta = \frac{\cos PT}{\cos x'T}$$

Da $PT = 180 - P : T$ und $x'T = 90 - \frac{T' : T}{2}$ ist, so findet man:

$$\beta = 63^\circ 56' 20''$$

Die Gleichung der Fläche T, deren Indices 1 1 0 sind, ist:

$$a \sin TMP = \operatorname{ctg} TM$$

wenn b = 1 gesetzt wird.

Daraus folgt, da $TMP = Px' = \beta$ ist:

$$a = \frac{\operatorname{ctg} TM}{\sin TMP} = \frac{\operatorname{tg} Tx'}{\sin \beta} = 0{,}65842$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck PTx' folgt

$$\sin TPx' = \frac{\sin x'T}{\sin PT}$$

Daraus findet man

$$TPx' = oPx = 33^\circ 22'$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck Pxo folgt nun

$$\sin Px = \operatorname{ctg} oPx \operatorname{tg} xo$$

Daraus findet man

$$Px = 50^0 16'$$

Die Gleichung der Fläche o, deren Indices $\bar{1}\,1\,1$ sind, ist

$$a \sin xP = \operatorname{ctg} oM = c \sin xx'$$

Daraus folgt

$$c = \frac{\operatorname{ctg} oM}{\sin xx'} = \frac{\operatorname{tg} ox}{\sin xx'} = \frac{\operatorname{tg} ox}{\sin(\beta + Px)} = 0{,}55527$$

Das Axenverhältniss ist mithin:

$$a : b : c = 0{,}65842 : 1 : 0{,}55527$$

Bestimmung von n.

Die Indices von n seien 0 m 1, so ist die Gleichung von n:

$$\frac{1}{m} \operatorname{ctg} nm = c \sin nMx' = c \sin \beta$$

Daraus

$$m = \frac{\operatorname{ctg} nm}{c \sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} Pn}{c \sin \beta} \doteq 1$$

Mithin ist

$$n = P\dot{\infty}$$

Bestimmung von y und x.

Die Indices von y seien $\bar{1}\,0\,\frac{1}{m}$, so ist die Gleichung von y:

$$a \sin Py = mc \sin(\beta + Py)$$

Daraus folgt

$$m = \frac{a \sin Py}{c \sin(\beta + Py)} = 2$$

Mithin ist

$$y = +\,{}_2P\overline{\infty}$$

Die Indices von x ergeben sich aus der Zone o'xo.

Die Combination weist mithin auf:

$$\begin{array}{ccccccc} \infty P & . \ \infty P\dot{\infty} & . \ oP & . \ P\dot{\infty} & . \ +P & . \ +P\overline{\infty} & . \ +{}_2P\overline{\infty} \\ T & . \quad M & . \ P & . \quad n & . \quad o & . \quad x & . \quad y \end{array}$$

Drittes Beispiel (Tribenzhydroxylamin) [1]).

Die Fig. 66a repräsentirt eine dreizählige Combination des Tribenzhydroxylamins. Die Klinodiagonale steigt vom

Fig. 66.

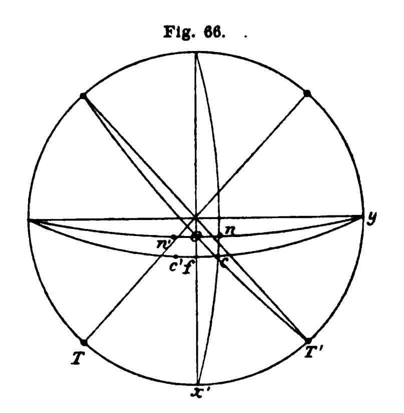
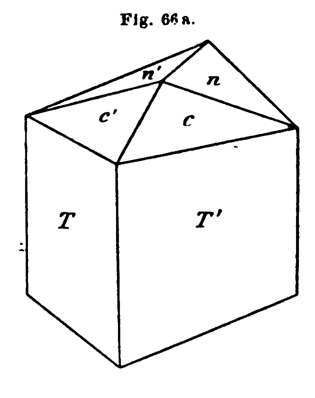


Fig. 66a.



Beobachter aus in die Höhe. Die Fig. 66 ist eine stereographische Projection der Combination. Wählen wir c c' zur negativen Grundpyramide, so ist (s. Fig. 66a)

T T' das Prisma und

n n' eine positive Hemipyramide oder ein Klinodoma m P $\grave{\infty}$

Bekannt sind die Winkel (s. Fig. 66a):

$$T : T' = 96^0\,36' \qquad c : c' = 149^0\,24' \qquad c : T' = 118^0\,14'$$
$$n : n' = 146^0\,50' \text{ und } n' : c' = 162^0\,50'$$

Aus diesen Winkeln findet man für die Fig. 66 die Winkel:

$$c\,y = 74^0\,42' \qquad c\,T' = 61^0\,46' \qquad y\,T' = 48'\,18'$$
$$n\,c = 17^0\,10' \text{ und } n\,o = 16^0\,35'$$

Berechnung des Axenverhältnisses und des Winkels β.

Die Indices der Fläche c sind 1 1 1, die der Basis o sind 0 0 1.

---

[1]) Vergl. die Mittheilungen von C. Klein in den Annalen der Chemie und Pharmacie, Bd. 166, p. 181 und s. auch C. Klein, Einleitung in die Krystallberechnung, 1876, S. 258.

Die Gleichung der Fläche c ist, wenn $b = 1$ gesetzt wird:

$$a \sin cyo = \operatorname{ctg} cy = c \sin cyx' \text{ oder da}$$

$$cyx' = fx' \text{ und } cyo = fo \text{ ist:}$$

$$a \sin fo = \operatorname{ctg} cy = c \sin fx'$$

Daraus folgt

$$a = \frac{\operatorname{ctg} cy}{\sin fo} \qquad c = \frac{\operatorname{ctg} cy}{\sin fx'}$$

Um fx' zu finden, berechne man das sphärische Dreieck cyT', dessen drei Seiten bekannt sind. Die Rechnung ergibt:

$$fx' = 65^{0}\,35'\,54'' \text{ und } ycT' = fco = 50^{0}\,30'\,44''$$

In dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck fco kennt man fc und fco; mithin kann es berechnet werden. Die Rechnung ergibt:

$$fo = 17^{0}\,45'\,25''$$

Da $\beta = ox' = fx' + fo$ ist, so folgt

$$\beta = 83^{0}\,21'\,20''$$

Aus den oberen zwei Gleichungen findet man:

$$a = 0{,}8971 \qquad c = 0{,}3004$$

Daher

$$a : b : c = 0{,}8971 : 1 : 0{,}3004$$

Berechnung von n.

n kann eine Klinodomenfläche, kann aber auch eine Pyramidenfläche repräsentiren.

Gesetzt n sei ein Klinodoma $mP\grave{\infty}$. In diesem Falle müsste die Kante, in der sich die beiden Flächen n und n' schneiden, der Klinodiagonale parallel sein. Die Senkrechte vom Axenmittelpunkte auf diese Linie müsste daher mit der Senkrechten auf die Basis zusammenfallen.

Die Indices des Punktes n seien $0\,1\,\frac{1}{m}$, so ist die Gleichung von n:

$$\operatorname{tg} no = mc \sin ox'$$

Aus dem sphärischen Dreieck nyc, dessen drei Seiten bekannt sind, folgt

$$\cos nc = \cos ny \cos cy + \sin ny \sin cy \cos fo$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$fo = 17^0\,48'$$

Oben wurde $fo = 17^0\,45'\,25''$ gefunden.

Beide Werthe für fo stimmen so genau miteinander überein, dass die kleine Differenz von $2'\,35''$ auf Rechnung der Beobachtungsfehler zu setzen ist. Aus der Gleichung

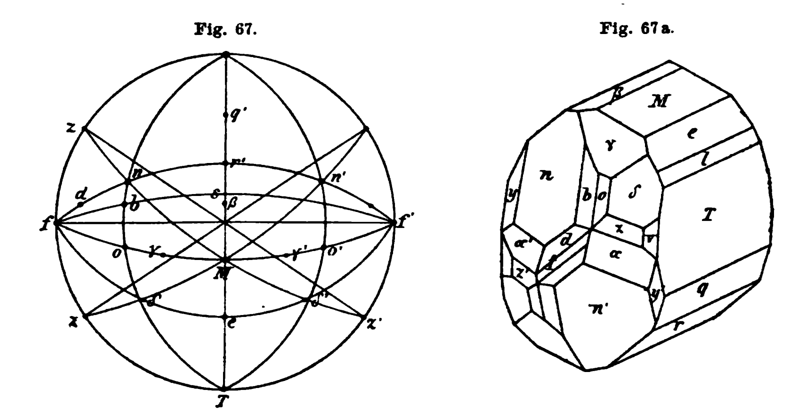
$$m = \frac{\text{tg}\, n o}{c \sin o x'}$$ findet sich $m = 1$. Mithin ist

$$n = P\grave{\infty}$$

Viertes Beispiel (Epidot) [1].

Die Fig. 67a repräsensirt eine 18zählige Combination des Epidots aus dem Untersulzbachthal im Pinzgau. Die Klinodiagonale fällt von links nach rechts herab, die Orthodiagonale

Fig. 67. Fig. 67a.



läuft auf den Beobachter zu. Wählt man M zu oP, n zu + P und T zu $\infty P\bar{\infty}$, so ist

f das Klinopinakoid $\infty P\grave{\infty}$

e und l sind negative Hemiorthodomen — $mP\bar{\infty}$

---

[1]) S. die Mittheilungen von C. Klein im „Neuen Jahrbuch für Mineralogie", 1872, p. 113; vergl. auch Einleitung in die Krystallberechnung von C. Klein, Stuttgart 1876, S. 237, Taf. VII, Fig. 3; vergl. auch: Ueber die Krystallformen des Epidot von H. Bücking, Zeitschrift für Krystallographie, Bd. 2, S. 321.

β, q und r sind positive Hemiorthodomen $+ \mathrm{m P \overline{\infty}}$
γ und o sind Klinodomen $\mathrm{m P \grave{\infty}}$
. z ist das Prisma $\infty \mathrm{P}$
α', b, y und d sind positive Hemipyramiden $+ \mathrm{m P n}$
v ist ein Prisma $\infty \mathrm{P \bar{n}}$
δ eine negative Hemipyramide $- \mathrm{m P n}$
Bekannt sind die Winkel (s. Fig. 67 a):

$M : T = 115^\circ 24'$	$M : \beta = 145^\circ 39'$
$M : r = 63^\circ 42'$	$M : l = 133^\circ 50'$
$z : z' = 109^\circ 59' 30''$	$T : q = 154^\circ 2'$
$f : d = 170^\circ$	$M : \gamma = 140^\circ 48'$
$M : e = 145^\circ 17' 40''$	$T : b = 79^\circ 53'$

Die Fig. 67 ist eine stereographische Projection einiger Flächen der Combination. In dieser Projection geht die Orthodiagonale von links nach rechts.

Berechnung des Axenverhältnisses und des Winkels β.

Der Winkel $MT = 180 - M : T$ ist $= \beta = 64^\circ 36'$

Die Indices von z′ (Fig. 67) sind 1 1 0. Die Gleichung von z′ ist:

$$a \sin MT = \operatorname{ctg} z'f' = \operatorname{tg} Tz'$$

wenn M die Projection der Basis (0 0 1) ist. Aus dieser Gleichung folgt

$$a = \frac{\operatorname{tg} Tz'}{\sin MT} = \frac{\operatorname{tg} Tz'}{\sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(z : z')}{\sin \beta}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} 55^\circ}{\sin 64^\circ 36'} = 1{,}58073$$

Da r′ (Fig. 67) in der Zone n r′ n′ liegt, so findet man für r′ die Indices $\bar{1}$ 0 1. Die Gleichung von r′ ist mithin

$$a \sin r'M = c \sin r'T$$

woraus

$$c = \frac{a \sin r'M}{\sin r'T}$$

Nun ist

$r'M = 180 - Mr = M : r = 63^\circ 42'$ und $r'T = \beta + r'M = 128^\circ 18'$

Mithin ergibt sich

$$c = 1{,}80574$$

Berechnung von e und l.

Die Indices von e seien $1\ 0\ \frac{1}{m}$, so ist die Gleichung von e:

$$a \sin Me = mc \sin eT$$

woraus

$$m = \frac{a \sin Me}{a \sin eT} = \frac{a \sin Me}{c \sin (\beta - Me)}$$

Da $Me = 180 - M : e = 34^{\circ}\, 42'\, 20''$ ist, so folgt $m = 1$. Mithin ist

$$e = -P\overline{\infty}, \text{ ebenso findet man } l = -2P\overline{\infty}$$

Berechnung von β.

Die Indices von β seien $\bar{1}\ 0\ \frac{1}{m}$. Die Gleichung von β ist

$$a \sin M\beta = mc \sin \beta T \text{ (Fig. 67)}$$

Daraus

$$m = \frac{a \sin M\beta}{c \sin \beta T} = \frac{a \sin M\beta}{c \sin (M\beta + \beta)} = \frac{1}{2}$$

Mithin ist

$$\beta = + \tfrac{1}{2} P\overline{\infty}$$

Berechnung von q' (Fig. 67).

Die Indices von q' seien $\bar{1}\ 0\ \frac{1}{m}$. Die Gleichung von q' ist

$$a \sin Mq' = cm \sin q'T$$

Daraus

$$m = \frac{a \sin Mq'}{c \sin q'T} = \frac{a \sin (q'T - \beta)}{c \sin q'T} = \frac{a \sin 89^{\circ}\, 26'}{c \sin 154^{\circ}\, 2'} = 2$$

Mithin ist

$$q' = + 2P\overline{\infty}$$

Berechnung von δ.

Die Indices von δ seien $\frac{1}{n}\ \bar{1}\ \frac{1}{m}$

Weil δ in den beiden Zonen Tδn und zδ liegt, so ergibt sich vermöge der Zonengleichung $m = n = 1$. Mithin ist

$$\delta = -P$$

Berechnung von γ.

Die Indices von γ seien $0\,\bar{1}\,\frac{1}{m}$. Die Gleichung von γ ist daher

$$\operatorname{tg} M\gamma = mc \sin MT = mc \sin \beta$$

Daraus

$$m = \frac{\operatorname{tg} M\gamma}{c \sin \beta} = \frac{1}{2}$$

Mithin ist

$$\gamma = \tfrac{1}{2} P \grave{\infty}$$

Berechnung von d (Fig. 67).

Die Indices von d seien $\frac{\bar{1}}{n}\,\bar{1}\,\frac{1}{m}$. Da d in der Zone fdn liegt, so folgt vermöge der Zonengleichung $m = n$. Die Indices von d sind jetzt: $\frac{\bar{1}}{n}\,\bar{1}\,\frac{1}{n}$ oder $\bar{1}\,\bar{n}\,1$. Die Gleichung von d ist mithin

$$a \sin r'M = \frac{1}{n} \operatorname{ctg} df' = c \sin r'T$$

Daraus

$$n = \frac{\operatorname{ctg} df'}{a \sin r'M} = 4{,}0015 = 4 \text{ annähernd.}$$

Mithin ist

$$d = +\, {}_4P\grave{_4}$$

Berechnung von b (Fig. 67).

Die Indices von b seien $\frac{\bar{1}}{n}\,\bar{1}\,\frac{1}{m}$. Weil b in der Zone $T\delta n$ liegt, muss $m = 1$ sein. Die Indices von b sind daher $\frac{\bar{1}}{n}\,\bar{1}\,1$. Die Gleichung von b ist mithin

$$an \sin sM = \operatorname{tg} bs = c \sin sT$$

Daraus

$$n = \frac{c \sin sT}{a \sin sM}$$

Der Winkel Ts ergibt sich aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck bsT, wenn der Winkel bTs desselben bekannt ist. Der letztere kann aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck nr′T berechnet werden, wenn nr′ zuvor ermittelt worden ist.

Die Gleichung von n, deren Indices $\bar{1}\ \bar{1}\ 1$ sind, ist

$$a \sin r'M = \operatorname{tg} nr' = c \sin r'T$$

Daraus folgt

$$\operatorname{tg} nr' = a \sin r'M$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck nr′T folgt

$$\operatorname{ctg} nTr' = \frac{\sin r'T}{\operatorname{tg} nr'} = \frac{\sin r'T}{a \sin r'M}$$

Daraus

$$nTr' = 61^\circ\, 1'$$

Aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck bsT folgt

$$\operatorname{tg} Ts = \cos r'Tn \operatorname{tg} Tb$$

Daraus

$$Ts = 110^\circ\, 13'$$

Mithin ist

$$Ms = Ts - MT = 45^\circ\, 37'$$

Nunmehr folgt aus der obigen Gleichung für n:

$$n = 1{,}5 = \frac{3}{2}$$

Mithin ist

$$b = +P\frac{\grave{3}}{2}$$

Die übrigen Flächen ergeben sich aus dem Zonenverbande.

v liegt in der Zone $v\delta\gamma$. Vermöge der Zonengleichung ergibt sich

$$v = \infty P\bar{2}$$

y′ liegt in den beiden Zonen n′y′T und y′qy″ rechts von q (Fig. 67a). Aus der Zonengleichung findet man

$$y = +2P\bar{2}$$

α ergibt sich als Durchschnitt der beiden Zonen $\alpha z\delta$ und $\alpha y'q$

$$\alpha = +2P$$

o liegt in der Zone $no\delta$. Mithin ist

$$o = P\grave{\infty}$$

Die Combination weist folgende Formen auf:

$+P \;.\; oP \;.\; \infty P\bar{\infty} \;.\; \infty P\grave{\infty} \;.\; -P \;.\; \infty P \;.\; +P\bar{\infty}$

$n \;.\; M \;.\; T \;.\; f \;.\; \delta \;.\; z \;.\; r$

$.\; -P\bar{\infty} \;.\; -2P\bar{\infty} \;.\; +\frac{1}{2}P\bar{\infty} \;.\; +2P\bar{\infty} \;.\; \frac{1}{2}P\grave{\infty}$

$.\; e \;.\; l \;.\; \beta \;.\; q \;.\; \gamma$

$.\; 4P\grave{4} \;.\; +P\grave{\frac{3}{2}} \;.\; \infty P\bar{2} \;.\; 2P2 \;.\; 2P \;.\; P\grave{\infty}$

$.\; d \;.\; b \;.\; v \;.\; y' \;.\; \alpha \;.\; o$

Das trikline Krystallsystem.

---

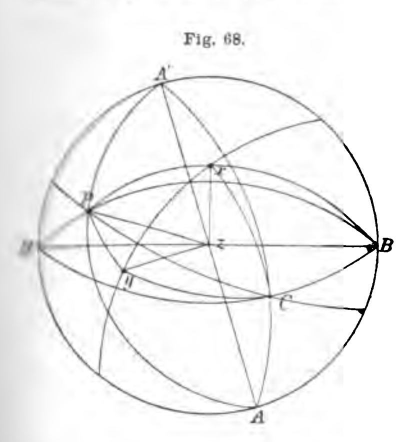
§. 22.

Die Indices der Krystallfläche P in Fig. 68 seien h k l. Die Gleichung dieser Fläche ist auch in diesem System

$$\frac{a}{h} \cos Px = \frac{b}{k} \cos Py = \frac{c}{l} \cos Pz$$

In dieser Form findet aber die Gleichung keine Anwendung, denn x, y und z repräsentiren nicht die Pole der Krystallflächen 1 0 0, 0 1 0, 0 0 1, sondern sind die Punkte auf der Oberfläche der Kugel, in denen diese von den drei Axen durchstochen wird. Um eine für die Berechnung brauchbare Formel zu erhalten, formen wir die Gleichung in folgender Weise um.

Fig. 68.



Durch xy, xz und yz denken wir uns grösste Kreise gelegt und construiren die Pole dieser Kreise. Es sei A der Pol des Kreises zy; es repräsentirt mithin A die Fläche, deren Indices 1 0 0 sind. Ist B der Pol des Kreises xz, so repräsentirt B die Fläche 0 1 0, und C repräsentirt die Fläche 0 0 1, wenn C der Pol des Kreises xy ist.

Es ist nun leicht einzusehen, dass auch z der Pol von AB, y der Pol von AC und x der Pol von BC ist. Es ist mithin nach einem bekannten Satze der Stereometrie:

$$yz = \alpha = 180 - CAB$$
$$xz = \beta = 180 - CBA$$
$$xy = \gamma = 180 - ACB$$

Legen wir durch je zwei Punkte auf der Oberfläche der Kugel einen grössten Kreis, so erhalten wir, ausser anderen, das sphärische Dreieck PCx, aus dem folgt

$\cos Px = \sin PC \cos PCx$, denn x ist der Pol von BC,

mithin ist $xC = 90^0$. Da x von jedem Punkte des Kreises BC einen Abstand von 90^0 hat, so ist $\sphericalangle xCB = xCB' = 90^0$ und $\sphericalangle PCx = 90 - PCB'$, folglich ist $\cos PCx = \sin PCB' = \sin (180 - PCB) = \sin PCB$. Die vorstehende Gleichung geht daher über in die folgende:

a) $\cos Px = \sin PC \sin PCB$

Aus dem sphärischen Dreieck PBx folgt in analoger Weise, weil $xB = 90^0$ ist,

b) $\cos Px = \sin PB \cos PBx = \sin PB \cos (90 - PBC)$
$= \sin PB \sin PBC$

Aus dem sphärischen Dreieck PyC folgt, weil $yC = 90^0$ ist,

$\cos Py = \sin PC \cos PCy = \sin PC \cos (90 - PCA')$
$= \sin PC \sin PCA'$

c) $\cos Py = \sin PC \sin (180 - PCA) = \sin PC \sin PCA$

Aus dem sphärischen Dreieck PyA folgt, weil $yA = 90^0$ ist,

d) $\cos Py = \sin PA \cos yAP = \sin PA \cos (90 - PAC)$
$= \sin PA \sin PAC$

Aus dem sphärischen Dreieck PzB folgt

e) $\cos Pz = \sin PB \cos zBP = \sin PB \cos (90 - PBA')$
$= \sin PB \sin PBA' = \sin PB \sin PBA$

Aus dem sphärischen Dreieck PzA folgt

f) $\cos Pz = \sin PA \cos PAz = \sin PA \cos (90 - PAB')$
$= \sin PA \sin PAB' = \sin PA \sin PAB$

Setzt man die Werthe für cos Px, cos Py und Pz aus der Gl. a, b, c, d, e, f in die Gleichung

$$\frac{a}{h} \cos Px = \frac{b}{k} \cos Py = \frac{c}{l} \cos Pz$$

so erhält man die Gleichungen

$$1) \begin{cases} \frac{a}{h} \sin PCB = \frac{b}{k} \sin PCA \\ \frac{b}{k} \sin PAC = \frac{c}{l} \sin PAB \\ \frac{a}{h} \sin PBC = \frac{c}{l} \sin PBA \end{cases}$$

Diese Hauptgleichungen des triklinen Systems gelten, was leicht zu beweisen ist, wenn die Indices von P sind: h k l oder h k l oder h k l oder $\bar{h}$ k l. Der Pol P mag mithin auf der oberen Hälfte der Oberfläche der Kugel liegen wo er will, die Gl. 1 bleiben richtig.

Berechnung complicirter Combinationen.

§. 23.

Erstes Beispiel (Albit).

Die Fig. 69a repräsentirt eine zwölfzählige Combination des Albits. Die Fig. 69 ist die stereographische Projection der Combination. Wählen wir P zum basischen Hauptschnitt, M zum Brachypinakoid und o zur Grundpyramide, so ist:

l ein Prisma $\infty \bar{P}{,}'n$
T ein Prisma $\infty {,}'\bar{P}n$
v die Pyramide ,P
f ein Prisma $\infty \bar{P}{,}'n$
z ein Prisma $\infty {,}'\bar{P}n$
e ein Doma $m{,}\bar{P}'\infty$
n ein Doma $m'\bar{P}{,}\infty$
x und y zwei Domen $m{,}\bar{P}{,}\infty$

Bekannt sind die Winkel [1]):

T : l = 120° 47′	P : o = 57° 48′ = P o′ in Fig. 69
P : l = 114° 42′	M : f = 149° 35′
P : T = 110° 50′	M′ : n = 46° 50′ (Fig. 69)
P : M = 93° 36′	

Fig. 69.

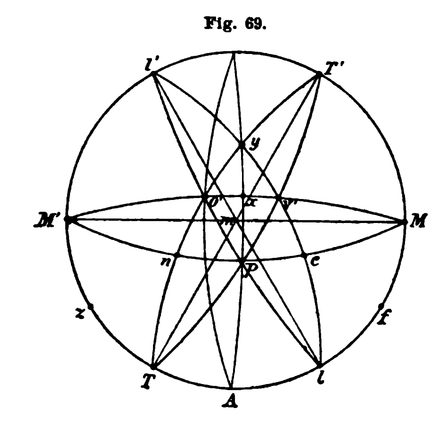
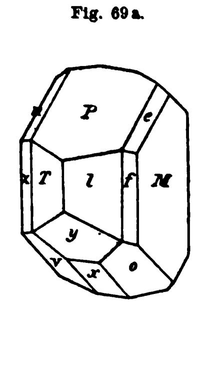


Fig. 69 a.



Berechnung von l und T.

l liegt in der Zone l P o′ (o′ hinten, in der Fig. 69 a nicht sichtbar), daher ergibt sich vermöge der Zonengleichung:

$$l = \infty P,'$$

und T liegt in der Zone T P v′ (v′ hinten, in der Fig. 69 a nicht sichtbar), daher

$$T = \infty ,'P$$

Construction des Poles P des basischen Hauptschnitts (Fig. 69).

Im triklinen Systeme muss der Pol P des basischen Hauptschnitts durch eine besondere Construction gefunden werden, die man auch in den anderen Systemen für eine Fläche zur Anwendung bringt, die nicht durch den Zonenverband, sondern nur durch die Winkel, die sie mit anderen Flächen bildet, zu

---

[1]) Die Winkel sind dem Werke: Manuel de Minéralogie par Des-Cloizeaux, T. I, p. 318, entlehnt.

construiren ist. In der Fig. 69 kann das Dreieck TPl berechnet werden. Man findet $PlT = 79^\circ 34'$, folglich $PlM = 100^\circ 26'$. Nun kann auch das Dreieck PlM berechnet werden. Man findet: $MPl = 59^\circ$, $Ml = 60^\circ 27'$ und $PMl = 63^\circ 32'$. Nennen wir den Mittelpunkt des Kreises in Fig. 69 m und errichten in m eine Senkrechte auf die Linie MM′, so schneidet diese den Bogen MPM′ in einem Punkte nahe bei P, den wir P′ nennen wollen (nicht gezeichnet). Es ist

$$mP' = \sphericalangle\, mMP' = 90 - PMl$$

Der Punkt P′ ist nach den früheren Erläuterungen leicht zu construiren. Durch die drei Punkte MP′M′ lege man einen Kreis, so erhält man den Bogen MP′M′, in welchem P liegt. In analoger Weise construire man den Bogen lPl′. Der Durchschnitt der beiden Bögen MPM′ und lPl′ liefert den Pol P des basischen Hauptschnitts.

Berechnung von MA (Fig. 69).

Es sei A der Pol des Makropinakoids 1 0 0. Dieser Pol A muss construirt werden, wiewohl das Makropinakoid in der Fig. 69a gar nicht vorkommt, weil sonst die Axenlängen a, b und c aus der Gl. 1, S. 202 nicht berechnet werden können.

Die Berechnung erfolgt mit Hilfe der Gl. 7 und 8 oder 9, S. 12 und 13. Die Gl. 9, S. 13 heisst:

$$\frac{\operatorname{ctg} PS - \operatorname{ctg} PP'}{\operatorname{ctg} PQ - \operatorname{ctg} PP'} = \frac{ke - fh}{fh' - ek'} \cdot \frac{qh' - pk'}{kp - qh}$$

Lässt man die vier tautozonalen Flächen PQSP′, auf welche diese Gleichung sich bezieht, zusammenfallen mit den Flächen M, l, A und T, deren Indices sind: 0 1 0, 1 1 0, 1 0 0 und $1\,\bar{1}\,0$, so lässt sich $PS = MA$ berechnen, weil die Winkel $Ml = 60^\circ 27'$ und $MT = Ml + Tl = 119^\circ 40'$ bekannt sind. Die rechte Seite der vorstehenden Gleichung ist $\frac{1}{2}$; daher findet man

$$\operatorname{ctg} MA = \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} Ml + \operatorname{ctg} MT)$$

$$MA = 90^\circ 4' 20''$$

Mit Hilfe dieses Winkels MA kann man A sofort in die Fig. 69 eintragen.

Berechnung der Axenwinkel und der Axenlängen.

Da die Flächen A, M, P die Indices 1 0 0, 0 1 0, 0 0 1 haben, so hat man nur nach den früheren Ausführungen das sphärische Dreieck AMP zu berechnen. Die Seiten des dazu gehörigen Polardreiecks sind die Winkel xy, xz und yz der Axen; und zwar ist

$$\alpha = 180 - PAM$$
$$\beta = 180 - PMA \text{ und}$$
$$\gamma = 180 - MPA$$

Die Berechnung des Dreiecks PlA, in welchem $PlA = 79^0 34'$, $Pl = 65^0 18'$ und $Al = 29^0 37' 20''$ ist, liefert:

$PAl = 85^0 56' 7''$ $\quad APl = 32^0 51' 33''$ $\quad PA = 63^0 36'$

Nun findet man nach Berechnung des Dreiecks AMP:

$\alpha = 94^0 3' 53''$ $\quad \beta = 116^0 28'$ $\quad \gamma = 88^0 8' 27''$

Die Berechnung des Dreiecks o′PA, in welchem bekannt sind $PA = 63^0 36'$, $Po' = 57^0 48'$ und $o'PA = 147^0 8' 27''$, liefert:

$Ao' = 113^0 33' 40''$ $\quad Ao'P = 32^0 1' 19''$ $\quad o'AP = 30^0 3' 41''$

Nunmehr liefern die Gl. 1, S. 202, wenn man b = 1 setzt:

$$a = \frac{\sin o'PA}{\sin o'PM} \qquad c = \frac{\sin o'AP}{\sin o'AM}$$
$$a = 0{,}63297 \qquad c = 0{,}55731$$

Berechnung von f.

Die Indices von f seien $\frac{1}{n}$ 1 0; die Gleichung von f ist alsdann (s. Gl. 1, S. 202):

$$a n \sin fPM = \sin fPA$$
$$n = \frac{\sin fPA}{a \sin fPM}$$

In dem sphärischen Dreieck fPM kennt man

$MP = 86^0 24'$ $\quad Mf = 30^0 25'$ $\quad PMf = PMA = 63^0 32'$

Die Berechnung desselben liefert:

$MPf = 28^0 9' 55''$ $\quad PMf = 111^0 29' 35''$

[illegible] ergibt sich

$$\xi PA = 63°41'38''$$

[illegible]

$$n = 3.0065 = 3 \text{ annähernd.}$$

[illegible]

$$\xi = x \bar{P},'3$$

Berechnung von n.

[illegible] seien [illegible] $\bar{1}\,\frac{1}{m}$. Die Gleichung von n ist:

$$\sin nAP = mc \sin nAM$$

$$m = \frac{\sin nAP}{c \sin nAM}$$

[illegible] AP ergibt sich aus dem sphärischen Dreieck [illegible]

[illegible] AP = [illegible] nPA = 88°8'27''

$$nAP = [illegible]$$

[illegible]

$$[illegible] nAP - PAM = 130°18'27''$$

[illegible] nunmehr $m = 2$. Mithin ist

$$n = [illegible]$$

Berechnung von e.

[illegible] Mithin ergibt sich

$$e = [illegible]$$

Berechnung von z.

[illegible] Mithin ergibt sich

[illegible]

[illegible] x.

[illegible] und x in der Zone oxv.

[illegible]

[illegible] $x = \bar{P}\,x$

Die Combination weist auf:

$0P \,.\, \infty,'P \,.\, 2'\breve{P},\infty \,.\, \infty\breve{P}\infty \,.\, \infty P,' \,.\, 2,\breve{P}'\infty \,.\, P,$

P . T . n . M . l . e . o

$.\, \infty,'\breve{P}3 \,.\, ,\bar{P},\infty \,.\, ,P \,.\, \infty\breve{P},'3 \,.\, 2,\bar{P},\infty$

. z . x . v . f . y

Zweites Beispiel (Axinit).

Die Fig. 70a repräsentirt eine Combination des Axinits. Die Fig. 70 ist die stereographische Projection der Combination. Eine allgemeine Bestimmung lehrt, dass, wenn wir r zu $'P$ und x zu P' wählen:

p das Prisma $\infty,'P$
u das Prisma $\infty P,'$
s ein Makrodoma $m'\bar{P}'\infty$
l das Makropinakoid $\infty\bar{P}\infty$ ist.

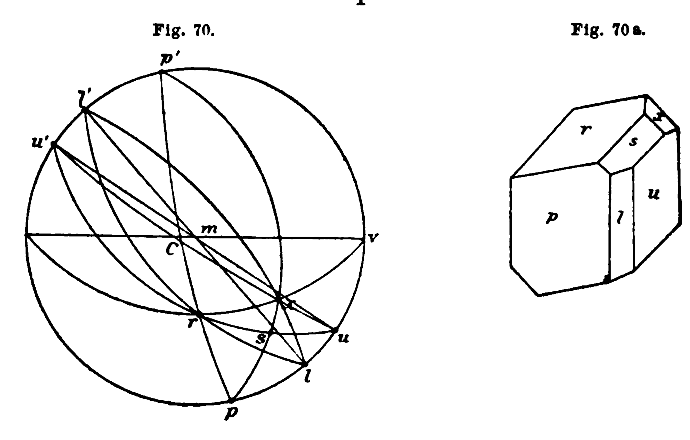


Fig. 70. Fig. 70a.

Bekannt sind die Winkel (in Fig. 70a)

$l : u = 164^\circ 25'$ daraus folgt für Fig. 70:	$lu = 15^\circ 35'$
$l : x = 147^\circ 33'$	$lx = 32^\circ 27'$
$x : u = 149^\circ 28'$	$xu = 30^\circ 32'$
$r : x = 139^\circ 6'$	$rx = 40^\circ 54'$
$l : r = 124^\circ 33'$ [1])	$lr = 55^\circ 27'$

[1]) Vergl. Des-Cloizeaux, Minéralogie, 1862, T. I, p. 515 u. f.; vergl. auch Naumann-Zirkel, Elemente der Mineralogie, S. 535; vergl. auch Klein, Einleitung in die Krystallberechnung, S. 293.

Da wir zur B... Th. I. S. 202 ... die L... in unserem Falle aber ... müssen wir die zwei fehlenden ... construiren können ... Die Flächen x und ... Gutdünken in einen ... lux und rxl.

... rxl. Construction

... die drei Seiten gegeben.

uxl = 29° 52′

lrx = 39° 39′

... construirt werden. Um x zu ... Mittelpunkt m des Kreises durch ... in m eine Senkrechte auf ... Nähe von C. etwa in C′ (nicht ... Der Bogen mC′ ist gleich

... xul = 5° 58′

... Nun lege man durch uC′u′ ... Bogen uC′u′, in dem auch das ... In analoger Weise construirt man ... der beiden Bögen lxl′ und ... des Winkels rls kann ... und da lr bekannt ist, so ... des Kreises lrl′ nach §. 4,

... Pinakoides v (0 1 0).

... grössten Kreis, so schneidet ... dem Pole des Pinakoids ... Dreiecke xuv berechnen ... Dreieck xuv kennt man

uxv = 48° 31′ 20″

xvu = 44° 43″

Berechnung des Pinakoids 0 0 1 (C) in Fig. 70.

Zuerst muss pl berechnet werden. Die vier Flächen p, l, u und v, denen die Indices $1\bar{1}0$, 1 0 0, 1 1 0 und 0 1 0 zukommen, sind tautozonal. Da die Winkel lu und uv bekannt sind, so kann pl mit Hilfe der Gl. 6, S. 12 berechnet werden. Die rechte Seite der Gl. 6 ist, wenn wir die Flächen pluv der Reihe nach zusammenfallen lassen mit den Flächen PQSP′, auf welche sich die Gl. 6 bezieht, gleich $\frac{1}{2}$. Die Gl. 6 heisst dann:

$$\frac{\sin PQ}{\sin P'Q} \cdot \frac{\sin P'S}{\sin PS} = \frac{1}{2}$$

Setzen wir $PS = PQ + QS$ und $P'S = QP' - QS$, so ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{\operatorname{ctg} QS - \operatorname{ctg} QP'}{\operatorname{ctg} QS + \operatorname{ctg} QP} = \frac{1}{2}$$

Daraus folgt

$$\operatorname{ctg} QP = \operatorname{ctg} QS - 2 \operatorname{ctg} QP'$$

oder auf die Fig. 70 übertragen:

$$\operatorname{ctg} pl = \operatorname{ctg} lu - 2 \operatorname{ctg} (lu + uv)$$

Die Rechnung ergibt:

$$pl = 28^\circ 55'$$

Nun lässt sich das Dreieck rlp berechnen. In diesem Dreieck kennt man

$rl = 55^\circ 27'$ $\quad pl = 28^\circ 55'$ $\quad rlp = 58^\circ 31' 20''$

Die Rechnung liefert:

$rpl = 98^\circ 16' 50''$ $\quad prl = 35^\circ 31' 10''$ $\quad pr = 45^\circ 13'$

Nun lässt sich das Dreieck rxC berechnen. Die Rechnung liefert:

$Cx = 65^\circ 13' 20''$ $\quad rC = 44^\circ 43' 20''$ $\quad rCx = 44' 11' 20''$

Die Berechnung des Dreiecks Cxv liefert:

$Cvx = 43^\circ 24'$ $\quad xCv = 32^\circ 56'$ $\quad Cv = 98^\circ 5'$

Die Construction von C bietet nun keine Schwierigkeiten mehr.

[illegible]chnung des Axenverhältnisses und der Axenwinkel.

[illegible] rechnung des Dreiecks Cxl liefert:

[illegible] = 2[illegible]° 57′ $\qquad$ lCx = 15° 32′ $\qquad$ Cl = 93° 56′ 40″

[illegible]chnungen der Fläche x, deren Indices 1 1 1 sind, [illegible] 1, S. 202), wenn b = 1 gesetzt wird:

$a \sin xcv = \sin xCl \qquad \sin xlC = c \sin xlv$

$$a = \frac{\sin xCl}{\sin xcv} \qquad c = \frac{\sin xlC}{\sin xlv}$$

$$a = 0{,}4928 \qquad c = 0{,}4809$$

$$\alpha = Clv \qquad \beta = 180 - Cvl \qquad \gamma = 180 - lCv$$

[illegible]giebt sich

$$\alpha = 82^\circ\,44' \qquad \beta = 91^\circ\,56' \qquad \gamma = 131^\circ\,33'$$

Berechnung von s.

[illegible] in der Zone psx und rsu. Daher folgt

$$s = 2'\bar{P}'\infty$$

[illegible] Combination weist auf:

$$\infty'P, \;.\; \infty P,' \;.\; \infty\bar{P}\infty \;.\; 'P \;.\; P' \;.\; 2'\bar{P}'\infty$$
$$p \;.\; u \;.\; l \;.\; r \;.\; x \;.\; s$$

Drittes Beispiel [illegible]

[illegible]

[illegible]

π und v zwei Tetartopyramiden $m\breve{P},n$
i eine Tetartopyramide $m\bar{P},n$
w eine Tetartopyramide $m,\breve{P}n$
s und μ zwei Tetartopyramiden $m,\bar{P}n$
b eine Tetartopyramide $m'\breve{P}n$
f ein Hemiprisma $\infty P,'n$
z ein Hemiprisma $\infty ,'Pn$
d eine Tetartopyramide mP,n

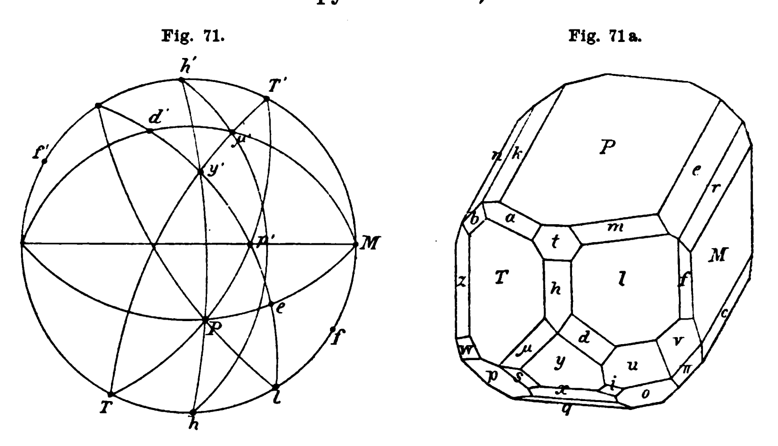


Fig. 71. Fig. 71a.

Die Fig. 71 ist die stereographische Projection eines Theils der Flächen.

Bekannt sind die Winkel (nach Marignac und Des-Cloizeaux, s. Fig. 71a):

P : M = 94° 10′	T : l = 120° 30′	P : k = 161° 22′
P : l = 114° 7′	P : e = 137° 22′	l : f = 151° 25′
M : l = 121° 56′	P : r = 112° 19′	T : z = 148° 33′

h : μ = 155° 13′
P : μ = 97° 53′
s : h = 125° 37′ 30″
c : P′ = 104° 50′

Construction von P in Fig. 71.

Zunächst berechne man das Dreieck MPl, in dem alle drei Seiten gegeben sind: PM = 85° 50′, Pl = 65° 53 und

h. $= 58^\circ 4'$. Man findet $lPM = 56^\circ 44' 20''$, $PMl = 64^\circ 4'$ und $PlM = 100^\circ 40' 20''$. Nunmehr kann man die beiden Bögen MP und lP construiren und deren Durchschnitt ist der Pol P des basischen Hauptschnitts.

Berechnung des Makropinakoids 1 0 0 (h).

Die vier Flächen T, h, l und M, deren Indices $1\bar{1}0$, 100, 110 und 010, sind tautozonal. Da die Winkel Tl und Ml bekannt sind, so lässt sich der Winkel Th vermöge der Gl. 9, S. 13 berechnen. Wir lassen zu dem Zwecke die Flächen T, h, l, M der Reihe nach mit den Flächen P, Q, S, P', auf welche sich die Gl. 9 bezieht, zusammenfallen. Die rechte Seite der Gl. 9 ist gleich $\frac{1}{2}$, mithin ergibt sich:

$$\text{ctg}\, PQ = 2\, \text{ctg}\, PS - \text{ctg}\, PP'$$

oder auf die Fig. 71 übertragen:

$$\text{ctg}\, Th = 2\, \text{ctg}\, Tl - \text{ctg}\, TM$$

Die Rechnung ergibt

$$Th = 30^\circ 28'$$

mithin

$$hl = 29^\circ 2'$$

Berechnung der Axenwinkel.

Das Dreieck Phl kann nunmehr berechnet werden. Die Berechnung ergibt:

$$Phl = 86^\circ 46' 40'' = 180 - \alpha$$
$$hPl = 32^\circ 4' \text{ und } Ph = 63^\circ 56' 20''$$

Nun ist

$$hPM = hPl + lPM = 88^\circ 48' 20'' = 180 - \gamma$$

und

$$PMh = 64^\circ 4' = 180 - \beta$$

Daher

$$\alpha = 93^\circ 13' 20'' \qquad \beta = 115^\circ 56' \qquad \gamma = 91^\circ 11' 40''$$

Berechnung der Axenlängen.

Die Indices des Hemiprismas l sind 1 1 0; die Gleichung von l ist folglich nach Gl. 1, S. 202, wenn man b = 1 setzt:

$$a \sin lPM = \sin lPh$$

$$a = \frac{\sin lPh}{\sin lPM} = 0{,}63492$$

Um c zu berechnen, müssen wir erst e bestimmen. e liegt in den Zonen (s. Fig. 71 a) P e M und l e p′ (p′ hinten, nicht sichtbar, in der Fig. 71 aber sichtbar). Daher ergibt sich

$$e = {}_{2},\breve{P}'\infty$$

Die Indices von e sind $0\ 1\ \frac{1}{2}$ oder 0 2 1. Die Gleichung von e ist mithin, wenn b = 1 gesetzt wird:

$$\frac{1}{2} \sin ehP = c \sin ehM \qquad c = \frac{\sin ehP}{2 \sin ehM}$$

Der Winkel ehP ist gleich PhM — ehM. Da Me = MP — Pe = 43° 12′ ist, so findet man aus dem Dreieck ehM folgende Stücke:

$$Meh = 107°32' \qquad ehM = 40°48'40''$$

$$eh = 70°22'20''$$

Daher

$$ehP = 45°58'$$

Mithin

$$c = 0{,}55002$$

Das Axenverhältniss ist mithin

$$0{,}63492 : 1 : 0{,}55002$$

Berechnung der Flächen t, m, a, y, x, u, d, i, v, n, π (s. Fig. 71 a).

Vermöge der Zonengleichung ergibt sich:

$t = {}_{2}'\bar{P}'\infty$ (Zone e t T)
$m = P'$ (Zonen e m T und l m P)
$a = {}'P$ (Zonen a t l und T a P)

$y = {}_2{,}\bar{P}{,}\infty$ (Zone p y l)
$x = {,}\bar{P}{,}\infty$ (Zone p x o)
$u = {}_2 P{,}$ (Zonen y u M und o u l)
$d = {}_4 \bar{P}{,}{}_2$ (Zonen u d h und y d l)
$i = \frac{4}{3} \bar{P}{,}{}_2$ (Zonen x i u und o i y)
$v = {}_4 \breve{P}{,}{}_2$ (Zonen u v M und v l t)
$n = {}_2{'}\breve{P}{,}\infty$ (Zone T n o′;
o′ hinten, nicht sichtbar in Fig. 71 a)
$\pi = {}_3 \breve{P}{,}{}_3$ (Zonen l v π und x o π)

Berechnung von r, k, c.

Die Indices von r seien $0\ 1\ \frac{1}{m}$ oder $0\,m\,1$. Die Gleichung von r ist mithin (s. Gl. 1, S. 202):

$$\frac{1}{m} \sin rhP = c \sin rhM$$

$$m = \frac{\sin rhP}{c \sin rhM}$$

Die Winkel rhM und rhP erhält man durch Berechnung des Dreiecks rhM. (r ist in Fig. 71 nicht gezeichnet. Es liegt auf dem Bogen eM zwischen e und M.) Die Berechnung liefert:

$rhM = 16^\circ 33' 30''$ $hrM = 113^\circ 58' 10''$ $rh = 79^\circ 23' 20''$.

Da $rhP = PhM - rhM$ ist, so folgt $rhP = 70^\circ 13' 10''$

Mithin

$$m = 6{,}0023 = 6 \text{ annähernd.}$$

Mithin ist

$$r = {}_6{,}\breve{P}{'}\infty$$

Ebenso ergibt sich:

$$k = \frac{2}{3}{'}\breve{P}{,}\infty \quad \text{und} \quad c = {}_6{'}\breve{P}{,}\infty$$

Berechnung von f.

Die Indices von f seien $1\ \frac{1}{n}\ 0$ oder $n\ 1\ 0$

$$\frac{a}{n} \sin fPM = \frac{1}{1} \sin fPh$$

Die Berechnung des Dreiecks f P M liefert:

$$f P h = 61^\circ 21' 50'' \text{ und } f P M = 27^\circ 26'$$

Daraus folgt

$$n = \frac{1}{3}$$

Das ist aber nicht möglich, weil $n > 1$ sein muss. Die Indices von f sind daher nicht $1 \frac{1}{n} 0$, sondern $\frac{1}{n} 1 0$ oder $1 n 0$ mit anderen Worten: f ist nicht ein makrodiagonales, sondern ein brachydiagonales Hemiprisma. Die Gleichung von f ist mithin

$$a \sin f P M = \frac{1}{n} \sin f P h$$

$$n = \frac{\sin f P h}{a \sin f P M} = 3$$

Mithin ist

$$f = \infty \breve{P}_{,}'{}_3$$

Für z findet man in analoger Weise:

$$z = \infty\, {}_{,}'\breve{P}_3$$

Berechnung von μ'.

Die Indices von μ' seien (s. Fig. 71): $\bar{1} \frac{1}{n} \frac{1}{m}$, so sind die Gleichungen von μ':

$$a \sin \mu' P M = n \sin \mu' P h$$
$$n \sin \mu' h P = m c \sin \mu' h M$$

Daraus folgt

$$n = \frac{a \sin \mu' P M}{\sin \mu' P h} \qquad m = \frac{n \sin \mu' h P}{c \sin \mu' h M}$$

Um die Winkel μ'PM, μ'hP u. s. w. zu finden, berechne man das sphärische Dreieck μ'Ph, in dem die 3 Seiten $\mu' P = 97^\circ 53'$, $\mu' h = 155^\circ 13'$ und $P h = 63^\circ 56' 20''$ bekannt sind. Die Rechnung liefert:

$$P h \mu' = 45^\circ 58' 20'' \quad h P \mu' = 162^\circ 17' \quad P \mu' h = 40^\circ 42'$$

Nun ergibt sich leicht

$$\mu' P M = 73^\circ 28' 40'' \qquad \mu' h M = 40^\circ 48' 20''$$

Daher folgt

$$n = 2 \text{ und } m = 4$$

Mithin ist

$$\mu = {}_4, \bar{P}_2$$

Berechnung von μ', wenn der Winkel μ'h allein bekannt ist.

Da μ in der Zone yμT liegt (Fig. 71a), so ergibt sich leicht, dass

$$m = \frac{2n}{n - 1}$$

sein muss.

Es genügt mithin zur Berechnung von m und n ein einziger Winkel, z. B. der Winkel μ'h (Fig. 71). Die Rechnung soll diesmal nur angedeutet werden.

Da die Indices von y' bekannt sind, so kann man mit Hilfe der dritten Gleichung der Gl. 1, S. 202 den Winkel y'MP berechnen; alsdann kennt man auch den Winkel y'Mh. Nun kann man das Dreieck y'Mh berechnen, aus dem sich hy' ergibt. Die Berechnung des Dreiecks Thy' liefert den Winkel Ty'h = 180 — μ'y'P. Nun kann das Dreieck μ'y'h und dann das Dreieck μ'y'P berechnet werden.

Berechnung von s.

s liegt in der Zone psy (Fig. 71a), folglich muss vermöge der Zonengleichung

$$m = \frac{2n}{n + 1}$$

sein.

Da der Winkel s : h bekannt ist, so kann s, wie eben gezeigt worden ist, berechnet werden. Die Rechnung ergibt:

$$s = \tfrac{4}{3}, \bar{P}_2$$

Berechnung von b, w und q.

Die Tetartopyramide b liegt in den Zonen Tbn und zba (Fig. 71a), mithin ergibt sich vermöge der Zonengleichung

$$b = {}_4{}'\breve{P}_2$$

Die Tetartopyramide w liegt in den Zonen pwz und wTt. Mithin

$$w = {}_4{,}\breve{P}_2$$

q liegt in der Zone qpw. Mithin

$$q = \tfrac{2}{3}{,}\bar{P}{,}\infty$$

Die Combination weist folgende Formen auf:

Pinakoide und Hemiprismen	Makrodiagonale Hemidomen	Brachydiagonale Hemidomen
$P = oP$	$t = {}_2{}'\bar{P}'\infty$	$e = {}_2{,}\breve{P}'\infty$
$h = \infty\bar{P}\infty$	$q = \tfrac{2}{3}{,}\bar{P}{,}\infty$	$r = {}_6{,}\breve{P}'\infty$
$M = \infty\breve{P}\infty$	$x = {,}\bar{P}{,}\infty$	$k = \tfrac{2}{3}{}'\breve{P}{,}\infty$
$T = \infty{,}'P$	$y = {}_2{,}\bar{P}{,}\infty$	$n = {}_2{}'\breve{P}{,}\infty$
$l = \infty P{,}'$		$c = {}_6{}'\breve{P}{,}\infty$
$z = \infty{,}'\breve{P}_3$		
$f = \infty\breve{P}{,}'_3$		

Tetartopyramiden

$m = P'$	$b = {}_4{}'\breve{P}_2$
$a = {}'P$	
$o = P{,}$	$\pi = {}_3\breve{P}{,}_2$
$p = {,}P$	$\mu = {}_4{,}\bar{P}_2$
$u = {}_2P{,}$	$d = {}_4\bar{P}{,}_2$
$v = {}_4\breve{P}{,}_2$	$s = \tfrac{4}{3}{,}\bar{P}_2$
$w = {}_4{,}\breve{P}_2$	$i = \tfrac{4}{3}\bar{P}{,}_2$

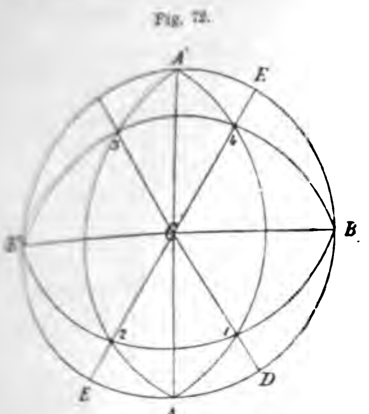
Viertes Beispiel (Bibromorthonitrophenol) [1].

Die Krystalle des Bibromorthonitrophenols bilden eine Combination von oP mit den vier Tetartopyramiden ${,}'P{,}'$. Arzruni [1]) berechnete die Elemente des Krystalls aus drei Winkeln, welche

[1]) Annalen der Physik u. Chemie von Poggendorff, Bd. 152, S. 286.

P' mit 'P, mit ,P und P' bildet, und aus den Winkeln P' : P, und ,P : P', die alle wegen günstiger Beschaffenheit der Flächen genau gemessen werden konnten. Hier sollen zur Uebung die Elemente des Krystalls aus fünf Winkeln der vier Tetartopyramiden ,'P,' berechnet werden.

Fig. 72.



Die vier Tetartopyramiden sind in der Fig. 72, die eine stereographische Projection der Tetartopyramiden ist, durch 1, 2, 3 und 4 bezeichnet.

Bekannt sind die Winkel:

$\sphericalangle$ 2 4 = 148° 8′
1 2 = 60° 25′
1 4 = 112° 5′
3 4 = 60° 5′
2 3 = 107°

Die Gl. 1, S. 202, die zur Berechnung der Axenlängen dienen, enthalten die Winkel PAB, PAC und diese sind es, die wir zunächst zu ermitteln haben. In der Fig. 72 seien A, B und C die Pinakoide 1 0 0, 0 1 0 und 0 0 1. Weder diese Pinakoide, noch die Tetartopyramiden können vorläufig construirt werden. Daher entwerfe man zunächst eine Handzeichnung, damit man die Berechnung der sphärischen Dreiecke verfolgen kann. Mit Hilfe der Zonengleichung findet man, dass die Flächen 2 1 B, ebenso die Flächen 3 2 A und 4 1 A und 3 4 B tautozonal sind. Der Durchschnitt der beiden Zonen AB und 3 1 liefert die Hemiprismenfläche D (1 1 0), der Durchschnitt der Zonen AB und 4 2 die Hemiprismenfläche E (1 $\bar{1}$ 0). Die Pinakoidfläche C liegt in den zwei Zonen 2 4 und 1 3, kann mithin construirt werden, wenn die Winkel bekannt sind, welche die beiden Zonen mit dem Grundkreise AB bilden.

Man berechne nun der Reihe nach folgende sphärische Dreiecke:

1) 2 3 4 2) 2 4 1 3) 3 4 1 4) 2 C 1 5) 2 1 A 6) 1 A C

Zur Berechnung von 1 D bediene man sich der Gl. 9, S. 13, deren rechte Seite $= \frac{1}{2}$ ist. Die Gleichung geht, wenn man die linke Seite derselben einer einfachen Umformung unterwirft, über in die Gleichung

$$\text{ctg } 1\,D = \text{ctg } 1\,C - 2 \text{ ctg } 1\,3$$

Nun berechne man noch die sphärischen Dreiecke 1 A D, 1 D B und C D B; alsdann erhält man

$$\alpha = 180 - CAB = 82^\circ 36' 30''$$
$$\beta = 180 - CBA = 90^\circ 45'$$
$$\gamma = 180 - ACB = 89^\circ 21' 30''$$

Das Parameterverhältniss wird mit Hilfe der Gl. 1, S. 202 berechnet. Man findet

$$a : b : c = 0{,}6114 : 1 : 1{,}8241$$

Da der Winkel $CAB = 97^\circ 23' 30''$ nur wenig von 90° abweicht, so ist die gerade Linie A C A′ an Stelle des nur wenig davon abweichenden Bogens gezeichnet worden. Dasselbe gilt für B C B′ und D 1 C. Die Construction des Bogens A 1 4 A′ setzt die Kenntniss des Winkels 1 A B voraus. Dieser Winkel wurde aber schon aus dem Dreieck 1 A D berechnet. Die Rechnung lieferte:

$$1\,AB = 30^\circ 10' \qquad AD = 31^\circ 41' \qquad DB = 58^\circ 19'$$

... der Zwillingskrystalle.

... Axensystem ist rechtwinklig.

§. 24.

... häufig vorkommende Erscheinung, dass zwei ... Krystalle nach einem bestimmten Gesetze ver- ... Dieses Gesetz nennt man das Zwillingsgesetz, ... Krystalle Zwillingskrystalle.

... mit parallelen Axen und Flächen sind als Wieder- ... betrachten und bedürfen keiner mathematischen ...

... deren Axen nicht parallel sind, bilden den ... der folgenden Untersuchungen.

... Fläche, mit welcher beide Krystallindividuen zusammen- ... sind, wird Zwillingsfläche, die Normale zur Zwil- ... Zwillingsaxe genannt.

... Erfahrung hat gelehrt, dass erstens die Zwillingsaxe ... Umdrehungsaxe genannt) eine im krystallographischen ... mögliche krystallographische Linie, also eine Kante, ... oder Flächennormale ist, und dass zweitens der Drehungs- ... 180° ist. Der Drehungswinkel ist derjenige Winkel, ... welchen man das eine Individuum drehen muss, bis es mit dem ... so zusammenfällt, dass die Flächen des einen den Flächen ... andern parallel oder als Fortsetzung der Flächen des andern ... Auch in den Fällen, wo schon eine Drehung um ... genügt, um die beiden Individuen in die erwähnte Stellung

zu bringen, gilt dies Gesetz; denn eine Drehung um 180° hat alsdann denselben Effect.

Zwei Individuen sind entweder mit einer Fläche aneinander gewachsen oder sie haben sich durchdrungen. Im ersten Falle nennt man sie Juxtapositions-, im zweiten Falle Penetrationszwillinge. Das oben angegebene Gesetz ist für beide dasselbe. Es bleibt auch dasselbe, ob beide Individuen sich vollständig durchdrungen, also einen gemeinsamen Mittelpunkt haben, oder ob sie nur mehr oder weniger in einander geschoben sind.

Bei der folgenden Untersuchung nehmen wir daher an, beide Individuen seien um einen und denselben Mittelpunkt ausgebildet und liegen symmetrisch gegen eine bestimmte Fläche.

Die mathematische Theorie hat zu ermitteln:

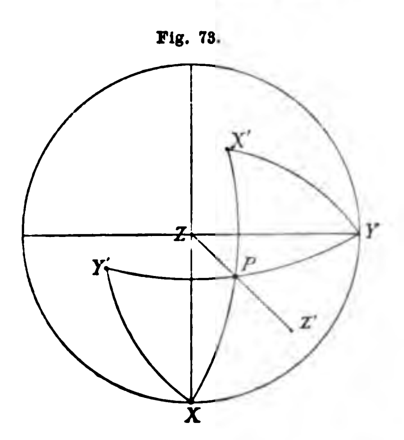
1) Die relative Lage der Krystallaxen des zweiten Individuums, bezogen auf die Axen des als fix angenommenen ersten Krystalls,

2) die Indices der Flächen des zweiten Individuums, bezogen auf die Indices und Axen des ersten Individuums und

3) die Lage der Zwillingsaxe oder die Indices der Fläche, mit welcher beide Individuen an einander gewachsen sind.

Zu 1. Ist in Fig. 73 P der Pol einer Fläche, deren Indices in Bezug auf die Axen X Y Z h k l sind, so ist nach Gl. 12, S. 24:

Fig. 73.



$$\cos PX = \frac{bch}{\sqrt{N}}$$

$$\cos PY = \frac{ack}{\sqrt{N}}$$

$$\cos PZ = \frac{abl}{\sqrt{N}}$$

worin

$N = a^2b^2l^2 + a^2c^2k^2 + b^2c^2h^2$ ist.

Denken wir uns den Punkt P mit dem Mittelpunkte der Kugel verbunden, so nennt man die entstehende Linie den

[illegible] drehen wir das Axensystem um diesen [illegible] von 180°, so kommt es in die [illegible]

[illegible] Krystallaxen des zweiten Individuums [illegible] des als fix angenommenen ersten [illegible] ist nichts anderes als die Berechnung [illegible] X'Y, X'Z, Y'Y, Y'X, Y'Z, Z'Z, [illegible] der Fig. 73 ersieht man sofort, dass [illegible] XZ' und Y'Z = Z'Y ist. Da das Axen- [illegible] Träger (Zwillingsaxe) durch 180° gedreht [illegible] man auch, dass X'X = 2 PX = 2 PX', [illegible] Y' und Z'Z = 2 PZ = 2 PZ' ist. Daraus

$$\cos 2\,PX = 2\cos^2 PX - 1 = 2\,\frac{b^2c^2h^2}{N} - 1$$

$$= \frac{b^2c^2h^2 - a^2b^2l^2 - a^2c^2k^2}{N}$$

$$\cos 2\,PY = 2\cos^2 PY - 1 = \frac{2\,a^2c^2k^2}{N} - 1$$

$$= \frac{a^2c^2k^2 - a^2b^2l^2 - b^2c^2h^2}{N}$$

$$\cos 2\,PZ = 2\cos^2 PZ - 1 = \frac{2\,a^2b^2l^2}{N} - 1$$

$$= \frac{a^2b^2l^2 - a^2c^2k^2 - b^2c^2h^2}{N}$$

[illegible] dem sphärischen Dreieck PX'Y folgt

$$[illegible]\ \cos PX' \cos PY - \sin PX' \sin PY \cos X'PY$$

[illegible] X'PY [illegible] 180 - XPY ist:

$$[illegible]\ \cos PX' \cos PY - \sin PX' \sin PY \cos XPY$$

[illegible] Winkel XPY ergibt sich aus dem sphärischen Dreieck

$$[illegible]\ \cos PX \cos PY - \sin PX \sin PY \cos XPY$$

[illegible] ist, so folgt

$$[illegible]\ \cos XPY = -\cos PX \cos PY$$

[illegible] diesen Werth in die vorhergehende Gleichung [illegible] da PX' = PX ist:

$$[illegible] = 2\cos PX \cos PY$$

Setzt man für cos PX und cos PY die oben angeführten Werthe, so ist

$$2)\begin{cases} \cos X'Y = \dfrac{2abc^2hk}{N} & \text{Ebenso findet man} \\ \cos X'Z = \dfrac{2ab^2chl}{N} \\ \cos YZ' = \dfrac{2a^2bckl}{N} \\ N = a^2b^2l^2 + a^2c^2k^2 + b^2c^2h^2 \end{cases}$$

Durch die Gl. 1 und 2, die für alle rechtwinkligen Systeme gelten, ist der ersten Forderung Genüge geleistet.

Zu 2. Die Indices der Flächen des zweiten Individuums, bezogen auf die Indices und Axen des ersten Individuums, sind zu ermitteln.

Da in Fig. 73 die Punkte X', Y' und Z' zugleich Flächen repräsentiren, so kann man nach den Indices dieser Flächen in Bezug auf das Axensystem XYZ fragen.

Die Indices von X' in Bezug auf die Axen XYZ seien $x_1\ x_2\ x_3$, so ist die Gleichung von X':

$$\frac{a}{x_1}\cos X'X = \frac{b}{x_2}\cos X'Y = \frac{c}{x_3}\cos X'Z$$

Daraus folgt

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{b\cos X'Y}{a\cos X'X} \quad \text{und} \quad \frac{x_3}{x_1} = \frac{c\cos X'Z}{a\cos X'X}$$

Da von den drei Indices $x_1\ x_2\ x_3$ einer willkürlich angenommen werden kann, so setze man $x_1 = a\cos X'X$, alsdann ist $x_2 = b\cos X'Y$ und $x_3 = c\cos X'Z$. In analoger Weise erhält man die Indices $y_1\,y_2\,y_3$ von Y' und die Indices $z_1\,z_2\,z_3$ von Z'. Setzt man noch für cos X'X die Werthe aus den Gl. 1 und 2, so ergeben sich für die Indices $x_1\ x_2\ x_3$ von X' in Bezug auf XYZ die Werthe:

$$x_1 = \frac{a(b^2c^2h^2 - a^2b^2l^2 - a^2c^2k^2)}{N}$$

$$x_2 = \frac{2ab^2c^2hk}{N} \qquad x_3 = \frac{2ab^2c^2hl}{N}$$

Für die Indices $y_1\ y_2\ y_3$ von Y' in Bezug auf XYZ die Werthe:

$$y_1 = \text{[illegible]} \qquad y_2 = \frac{b(a^2c^2k^2 - a^2b^2l^2 - b^2c^2h^2)}{N}$$

$$y_3 = \frac{2a^2bc^2kl}{N}$$

Für die Indices $z_1\ z_2\ z_3$ von Z' in Bezug auf XYZ die Werthe:

$$z_1 = \frac{2a^2b^2chl}{N} \qquad z_2 = \frac{2a^2b^2ckl}{N}$$

$$z_3 = \frac{c(a^2b^2l^2 - a^2c^2k^2 - b^2c^2h^2)}{N}$$

worin

$$N = a^2b^2l^2 + a^2c^2k^2 + b^2c^2h^2$$

Es ist nun auch leicht, die Winkel zu finden, welche irgend eine Ebene M, deren Indices in Bezug auf XYZ efg sind, mit den Axen $X'Y'Z'$ bildet. Die gesuchten Winkel sind MX', MY' und MZ'. Da die Indices von M, X', Y' und Z' bekannt sind, so ergibt sich vermöge Gl. 14, S. 26

$$4)\quad \begin{cases} \cos MX' = \dfrac{a^2b^2gx_3 + a^2c^2fx_2 + b^2c^2ex_1}{\sqrt{N_1}\sqrt{N_2}} \\ \cos MY' = \dfrac{a^2b^2gy_3 + a^2c^2fy_2 + b^2c^2ey_1}{\sqrt{N_1}\sqrt{N_3}} \\ \cos MZ' = \dfrac{a^2b^2gz_3 + a^2c^2fz_2 + b^2c^2ez_1}{\sqrt{N_1}\sqrt{N_4}} \\ \text{worin} \\ N_1 = a^2b^2g^2 + a^2c^2f^2 + b^2c^2e^2 \\ N_2 = a^2b^2x_3^2 + a^2c^2x_2^2 + b^2c^2x_1^2 \text{ u. s. w. ist.} \end{cases}$$

In diesen Gleichungen haben $x_1\ y_1\ z_1$ und $x_2\ y_2\ z_2$ die Werthe, welche ihnen die Gl. 3 zuweisen.

Es bleibt nun noch übrig, die Indices $e' f' g'$ der Fläche M in Bezug auf das Axensystem $X' Y' Z'$ zu ermitteln. Wie schon erwähnt, sind die Indices von M in Bezug auf das Axensystem XYZ efg.

Die Gleichungen der Fläche M, bezogen auf die Axen $X' Y' Z'$, sind:

$$\frac{a}{e'} \cos MX' = \frac{b}{f'} \cos MY' = \frac{c}{g'} \cos MZ'$$

Daraus folgt

$$\frac{f'}{e'} = \frac{b \cos MY'}{a \cos MX'} \text{ und } \frac{g'}{e'} = \frac{c \cos MZ'}{a \cos MX'}$$

Da ein Index willkürlich angenommen werden kann, so setze man

$$e' = a \cos MX'$$

Dann ist

$$f' = b \cos MY'$$

und

$$g' = c \cos MZ'$$

Setzt man in diesen Gleichungen für $\cos MX'$, $\cos MY'$ und $\cos MZ'$ die Werthe aus den Gl. 4, setzt dann für $x_1\ x_2\ x_3,\ y_1\ y_2\ y_3$ u. s. w. die Werthe aus den Gl. 3, so haben die entstehenden Gleichungen den Faktor $\frac{a^2 b^2 c^2}{N \sqrt{N_1} \sqrt{N_2}}$ gemeinschaftlich. Da jeder der drei Indices mit einer beliebigen Zahl multiplicirt oder dividirt werden darf, so kann man jeden der drei Indices durch den gemeinschaftlichen Faktor dividiren. Die Indices $e' f' g'$ erhalten dann, bezogen auf die Axen $X' Y' Z'$, die Werthe:

$$5) \left\{ \begin{array}{l} e' = e\,(b^2c^2h^2 - a^2b^2l^2 - a^2c^2k^2) + 2\,a^2h\,(b^2lg + c^2kf) \\ f' = f\,(a^2c^2k^2 - a^2b^2l^2 - b^2c^2h^2) + 2\,b^2k\,(a^2lg + c^2he) \\ g' = g\,(a^2b^2l^2 - b^2c^2h^2 - a^2c^2k^2) + 2\,c^2l\,(b^2he + a^2kf) \end{array} \right.$$

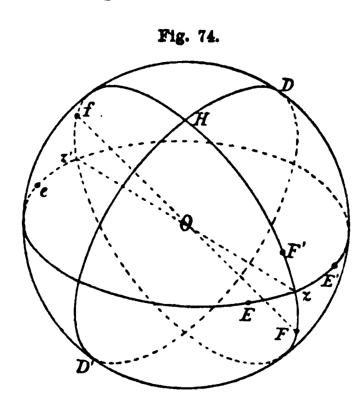
In diesen Gleichungen beziehen sich die Indices hkl und efg auf die Axen XYZ.

Durch diese Gleichungen ist die zweite Forderung erfüllt.

Zu 3. Bestimmung der Indices der Zwillingsfläche.

In der Fig. 74 sei zz′ die Zwillingsaxe und DHD′ die Zwillingsfläche. Da der Punkt z der Pol der Zwillingsfläche DHD′ ist, so hat man die Indices von z zu ermitteln. Sind E und E′ die Pole homologer Flächen beider Individuen, so müssen diese Flächen eine solche Lage haben, dass E mit E′ zusammenfällt, wenn man das eine Individuum um die Zwillingsaxe zz′ durch 180° dreht. Das ist nur möglich, wenn die drei Flächen E, z und E′ tautozonal sind und wenn Ez = E′z ist, d. i. wenn der Winkel EE′ durch den Pol z halbirt wird. Sind F und F′ zwei andere homologe Flächen beider Individuen, so müssen ebenso F, z und F′ tautozonal sein. Da z der Durchschnittspunkt der beiden Zonen F′F und E′E ist, so folgt die Regel: **Die Zwillingsfläche wird aus zwei bekannten Zonen der beiden Individuen vermittelst der Zonengleichung berechnet.**

Fig. 74.



Ist nur eine Zone der beiden Individuen bekannt, oder tritt nur ein Paar homologer Flächen auf, z. B. F und F′, so ist Folgendes zu bemerken. Die Gegenfläche von F im zweiten Individuum ist f und es ist fz′ = Fz = F′z. Da Hz = Hz′ = 90 ist, so folgt

$$HF' = 90 - F'z = Hz' - fz' = Hf$$

d. h. **die Zwillingsfläche halbirt den Winkel der beiden homologen Flächen.**

Mit Hilfe dieses Satzes ist es, wie wir sehen werden, leicht, die Indices der Zwillingsfläche zu finden.

Anwendung der vorgetragenen Lehren auf reguläre Gestalten.

§. 25.

Parallelflächen von m O n (h k l).

Zwei Zwillingsgesetze sind es besonders, welche die regulären Formen beherrschen. Die Zwillingsaxen beider Individuen sind parallel oder fallen zusammen. Dieses Gesetz bedarf keiner mathematischen Behandlung.

Das zweite Gesetz umfasst alle diejenigen Zwillinge, bei welchen die Zwillingsfläche eine Oktaëderfläche ist.

Wollen wir die im vorhergehenden Paragraphen entwickelten Formeln auf dieses Gesetz anwenden, so haben wir, weil die Zwillingsfläche P eine Oktaëderfläche ist, $h = k = l = 1$ zu setzen, und weil im regulären System die Parameter der Grundebene einander gleich sind, so müssen wir auch $a = b = c = 1$ setzen.

Denken wir uns zwei Hexakisoktaëderflächen nach diesem Gesetze verwachsen, so haben wir uns zu fragen: Welche Werthe haben die Indices einer Hexakisoktaëderfläche im System X Y Z, wenn die homologe Fläche, bezogen auf dasselbe System X Y Z, die Indices

1) $1 \frac{1}{n} \frac{1}{m}$ 2) $1 \frac{1}{n} \frac{\bar{1}}{m}$ 3) $1 \frac{\bar{1}}{n} \frac{1}{m}$ 4) $1 \frac{\bar{1}}{n} \frac{\bar{1}}{m}$

hat? $m > n > 1$. Das ist genau dasselbe, als wenn man sagt: Die Indices einer Hexakisoktaëderfläche in Bezug auf das Axensystem X Y Z seien $1 \frac{1}{n} \frac{1}{m}$. Welche Werthe haben die Indices derselben Fläche in Bezug auf das Axensystem X′Y′Z′? oder als wenn man sagt: Die Indices einer Hexakisoktaëderfläche in Bezug auf die Axen X Y Z seien $1 \frac{1}{n} \frac{1}{m}$. Welche Werthe haben die Indices derselben Fläche in Bezug auf dasselbe Axensystem, nachdem die Fläche durch 180° um die Zwillingsaxe gedreht worden ist?

Erster Fall. Die Indices einer Hexakisoktaëderfläche im System XYZ seien $1 \frac{1}{n} \frac{1}{m}$

Setzen wir in den Gl. 5, S. 225 für efg die Werthe $1 \frac{1}{n} \frac{1}{m}$ und für $h = k = l = a = b = c$ den Werth 1, so erhalten wir

$$e' = \frac{2m + 2n - mn}{mn} \qquad f' = \frac{2n + 2mn - m}{mn}$$

$$g' = \frac{2mn + 2m - n}{mn}$$

Da man jeden der drei Indices mit einer beliebigen Zahl multipliciren darf, so können wir den gemeinschaftlichen Nenner mn weglassen. Der grösste von den drei Indices ist $2mn + 2m - n$, der kleinste ist $2m + 2n - mn$ [1]).

Demnach sind die Indices der Hexakisoktaëderfläche, die im System XYZ die Indices $1 \frac{1}{n} \frac{1}{m}$ hat, im System X'Y'Z':

$$2mn + 2m - n \qquad 2mn + 2n - m \qquad 2m + 2n - mn$$

Früher wurde gezeigt, dass dem Zeichen hkl, worin $h > k > l$, das Naumann'sche Zeichen $\frac{h}{l} 0 \frac{h}{k}$ entspricht.

Alle Hexakisoktaëderflächen, welche im System XYZ das Parameterverhältniss $m : 1 : n$ haben, haben im System X'Y'Z' das Parameterverhältniss

$$\frac{2mn + 2m - n}{2m + 2n - mn} : 1 : \frac{2mn + 2m - n}{2mn + 2n - m}$$

Diesem Verhältniss entspricht die Formel:

$$\frac{2mn + 2m - n}{2m + 2n - mn} \, 0 \, \frac{2mn + 2m - n}{2mn + 2n - m}$$

---

1) Man setze, um zu erfahren, welcher von zweien Indices der grössere ist, $2m + 2n - mn > 2mn + 2n - m$, so folgt daraus $1 > n$. Da aber n stets > 1 sein muss, so ist $2m + 2n - mn < 2mn + 2n - m$.

Zweiter Fall. Die Indices einer Hexakisoktaëderfläche seien im System XYZ: $1 \frac{1}{n} \frac{\bar{1}}{m}$

Setzen wir in Gl. 5, S. 225 für efg die Werthe $1 \frac{1}{n} \frac{\bar{1}}{m}$ so ergeben sich die Indices derselben Fläche in Bezug auf das System X′Y′Z′:

$$2mn + 2m + n \qquad 2mn - m - 2n \qquad 2m - mn - 2n$$

Der erste dieser drei Indices ist der grösste. Um zu erfahren, welcher von den beiden anderen der grössere ist, haben wir die absoluten Werthe zu vergleichen. Ist

$$2mn - m - 2n < mn + 2n - 2m$$

oder ist

$$n > \frac{m}{4 - m}$$

so ist das Parameterverhältniss derselben Fläche in Bezug auf das System X′Y′Z′:

$$\frac{2mn + 2m + n}{2mn - m - 2n} : 1 : \frac{2mn + 2m + n}{mn + 2n - 2m}$$

Ist

$$n < \frac{m}{4 - m}$$

so ist das Parameterverhältniss derselben Fläche, bezogen auf das System X′Y′Z′:

$$\frac{2mn + 2m + n}{mn + 2n - 2m} : 1 : \frac{2mn + 2m + n}{2mn - 2n - m}$$

Ist endlich

$$n = \frac{m}{4 - m}$$

so ist das Parameterverhältniss derselben Fläche, bezogen auf das System X′Y′Z′:

$$\frac{3}{m - 2} : 1 : \frac{3}{m - 2}$$

Diesem Verhältniss entspricht eine Ikositetraëderfläche.

Dritter Fall. Die Indices einer Hexakisoktaëderfläche im System XYZ seien $1 \frac{\bar{1}}{n} \frac{1}{m}$

Mit Hilfe der Gl. 5 findet man Folgendes. Ist

$$n < \frac{4m}{m+1}$$

so ist das Parameterverhältniss derselben Fläche, bezogen auf das System X′Y′Z′:

$$\frac{2mn+m+2n}{2mn-2m-n} : 1 : \frac{2mn+m+2n}{mn+2m-2n}$$

Ist

$$n > \frac{4m}{m+1}$$

so ist das Verhältniss der Parameter:

$$\frac{2mn+m+2n}{mn+2m-2n} : 1 : \frac{2mn+m+2n}{2mn-2m-n}$$

Ist

$$n = \frac{4m}{m+1}$$

so ist das Parameterverhältniss:

$$\frac{3(m+1)}{2(m-1)} : 1 : \frac{3(m+1)}{2(m-1)}$$

Diesem Verhältniss entspricht eine Ikositetraëderfläche.

Vierter Fall. Die Indices einer Hexakisoktaëderfläche im System XYZ seien $1 \frac{\bar{1}}{n} \frac{\bar{1}}{m}$

Ist

$$n < \frac{m}{m-4} \text{ (oder } mn+2m+2n > 2mn+m-2n)$$

so ist das Parameterverhältniss derselben Fläche, bezogen auf das System X′Y′Z′:

$$\frac{mn+2m+2n}{2mn+n-2m} : 1 : \frac{mn+2m+2n}{2mn+m-2n}$$

Ist

$$n = \frac{m}{m - 4}$$

so ist das Parameterverhältniss:

$$\frac{m - 2}{3} : 1 : 1$$

Diesem Verhältniss entspricht eine Fläche des Triakisoktaëders.

Ist

$$n > \frac{m}{m - 4}$$

so ist das Parameterverhältniss:

$$\frac{2mn + m - 2n}{2mn + n - 2m} : 1 : \frac{2mn + m - 2n}{mn + 2m + 2n}$$

§. 26.

Parallelflächen von $m O m$.

Um die Parameter oder Indices einer Ikositetraëderfläche, bezogen auf die Axen XYZ, zu erhalten, deren homologe Fläche in demselben Axensystem die Indices

1) $m\,1\,1$ 2) $\bar{m}\,1\,1$ 3) $m\,\bar{1}\,1$

hat, setzen wir in den Formeln des vorhergehenden Paragraphen $n = m$.

Erster Fall. $m\,1\,1$.

Dem Zeichen (hll) entspricht das Naumann'sche Zeichen $\frac{h}{l} O \frac{h}{l}$. Sind die Indices einer Ikositetraëderfläche, bezogen auf das Axensystem XYZ, $m\,1\,1$, so sind die Indices derselben Fläche, bezogen auf X'Y'Z':

$$2m + 1 \qquad 2m + 1 \qquad 4 - m$$

Diese Indices entsprechen einer Fläche des Triakisoktaëders

$$\frac{2m + 1}{4 - m} O$$

wenn $m < 4$.

Sie entsprechen einer Fläche des Rhombendodekaëders ∞O, wenn $m = 4$ und entsprechen einer Fläche des Triakisoktaëders

$$\frac{2m+1}{m-4} O$$

wenn $m > 4$ ist.

Zweiter Fall ($\bar{m}$ 1 [illegible]). Parameter — 1, m, m.

Die Flächen, welche [illegible] vorstehende Parameterverhältniss in dem einen System [illegible] haben im anderen Systeme das Parameterverhältniss

$$[illegible] : 1 : \frac{m+4}{2m-1}$$

wenn $m + 4$ [illegible] oder $m < 5$ (Ikositetraëder),
1 : 1 : 1, wenn [illegible] (Oktaëder),

$$\frac{2m-1}{m+4} : 1 : 1$$

wenn m [illegible] (Triakisoktaëder).

Dritter Fall ($m \bar{1}$ 1). Parameter 1, —m, m.

[illegible] Flächen, welche das vorstehende Parameterverhältniss [illegible] System haben, haben im anderen Systeme das [illegible]verhältniss:

$$\frac{2m+3}{2m-3} : 1 : \frac{2m+3}{m}$$

[illegible] 3 (Hexakisoktaëder),
[illegible], wenn $m = 3$ (Ikositetraëder),

$$\frac{2m+3}{m} : 1 : \frac{2m+3}{2m-3}$$

wenn $m > 3$ (Hexakisoktaëder).



§. 27.

Parallelflächen von mO.

Um die Indices einer Fläche des Triakisoktaëders in Bezug auf das zweite Axensystem X′Y′Z′ zu erhalten, setzen wir in

den Formeln des §. 25 $n = 1$. Auch hier sind 3 Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall $(m\,m\,1)$. Parameter 1, 1, m.

Die Flächen des Triakisoktaëders, welche das Parameterverhältniss $m : 1 : 1$ im System XYZ haben, haben im System X'Y'Z' das Parameterverhältniss:

$$\frac{4m - 1}{m + 2} : 1 : \frac{4m - 1}{m + 2} \text{ (Ikositetraëder).}$$

Zweiter Fall $(m\,m\,\bar{1})$. Parameter 1, 1, —m.

Die Flächen, welche im System XYZ das Parameterverhältniss $-m : 1 : 1$ haben, haben im System X'Y'Z' das Parameterverhältniss:

$$\frac{4m + 1}{2 - m} : 1 : \frac{4m + 1}{2 - m}$$

wenn $m < 2$ (Ikositetraëder),

$\infty : 1 : \infty$, wenn $m = 2$ (Hexaëder),

$$\frac{4m + 1}{m - 2} : 1 : \frac{4m + 1}{m - 2} \text{ wenn } m > 2.$$

Dritter Fall $(m\,\bar{m}\,\bar{1})$. Parameter 1, —1, —m.

Die Flächen, welche das Parameterverhältniss $-m : 1 : -1$ im Systeme XYZ haben, haben im Systeme X'Y'Z' das Parameterverhältniss:

$$3m + 2 : 1 : \frac{3m + 2}{3m - 2} \text{ (Hexakisoktaëder).}$$

§. 28.

Parallelflächen von ∞On.

In den Formeln des §. 25 setzen wir $m = \infty$ und unterscheiden zwei Fälle.

Erster Fall (n 1 0). Parameter 1, n, ∞.

Die Flächen, welche im System XYZ das Parameterverhältniss $\infty : 1 : n$ haben, haben im System X′ Y′ Z′ das Parameterverhältniss

$$\frac{2(n+1)}{2-n} : 1 : \frac{2(n+1)}{2n-1}$$

wenn $n < 2$ (Hexakisoktaëder),

$$\infty : 1 : 2$$

wenn $n = 2$ (Tetrakishexaëder),

$$\frac{2(n+1)}{n-2} : 1 : \frac{2(n+1)}{2n-1}$$

wenn $n > 2$ (Hexakisoktaëder)

Zweiter Fall ($\bar{n}$ 1 0). Parameter —1, n, ∞.

Die Flächen, welche im System XYZ das Parameterverhältniss $\infty : 1 : -n$ haben, haben im System X′Y′Z′ das Parameterverhältniss

$$\frac{2n+1}{2(n-1)} : 1 : \frac{2n+1}{n+2}$$

wenn $n < 4$ (Hexakisoktaëder),

$$\frac{3}{2} : 1 : \frac{3}{2}$$

wenn $n = 4$ (Ikositetraëder),

$$\frac{2n+1}{n+2} : 1 : \frac{2n+1}{2(n-1)}$$

wenn $n > 4$ (Hexakisoktaëder).

§. 29.

Parallelflächen von ∞O.

Erster Fall (1 0 1). Parameter 1, ∞, 1.

Die Flächen, welche im System XYZ das Parameterverhältniss $\infty : 1 : 1$ haben, haben im System X′Y′Z′ das Parameterverhältniss

$$4 : 1 : 4 \text{ (Ikositetraëder).}$$

Zweiter Fall (1 0 $\bar{1}$). Parameter 1, ∞, -1.

Die Flächen, welche im System XYZ das Parameterverhältniss $\infty : 1 : -1$ haben, haben im System X′Y′Z′ das Parameterverhältniss

$$\infty : 1 : 1 \text{ (Rhombendodekaëder).}$$

§. 30.

Parallelflächen von O.

Den Flächen des Oktaëders in dem einen Individuum sind im anderen zwei Flächen von O und sechs Flächen von $_5O_5$ parallel.

§. 31.

Parallelflächen von $\infty O \infty$.

Den Flächen des Hexaëders in dem einen Individuum sind sechs Flächen von $_2O$ in dem anderen Individuum parallel.

§. 32.

Bestimmung der Zwillingsfläche.

Erstes Beispiel (Spinell, Magneteisen).

Erstes Verfahren. Eine am Spinell und Magneteisen häufig auftretende Zwillingsbildung ist in Fig. 75 im Durch-

schnitt, in Fig. 75a in parallelperspectivischer Ansicht dargestellt. Der Winkel der beiden Flächen o o in Fig. 75a (e g in Fig. 75) ist 109° 28′ 16″. Bei der Berechnung des Oktaëders haben wir den Winkel zweier Oktaëderflächen gleich 109° 28′ 16″ gefunden. Die Flächen o o in Fig. 75a, e g in Fig. 75 sind

Fig. 75.

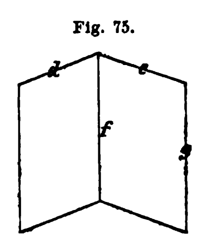
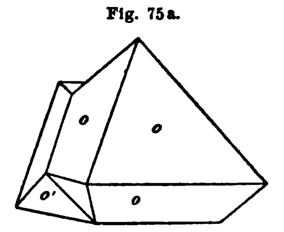


Fig. 75a.



mithin Oktaëderflächen. Die drei Flächen d f e in Fig. 75 sind tautozonal, denn sie schneiden sich in einer auf der Papierebene senkrechten Linie. Kann bewiesen werden, dass f parallel der Oktaëderfläche g ist, so ist die Zwillingsfläche f eine Oktaëderfläche. Im §. 24, S. 226 ist gezeigt worden, dass die Zwillingsfläche f den Winkel der beiden Flächen d und e halbirt. Dieser Winkel d e ist gleich 141° 3′ 28″; der halbe Winkel f e ist gleich 70° 31′ 44″ und da dieser Winkel den Winkel e g zu 180° ergänzt, so ist f parallel g. Mithin ist die Zwillingsfläche eine Oktaëderfläche, was auch der blosse Anblick lehrt.

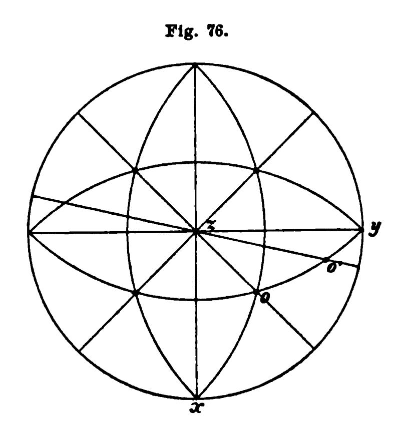
Zweites Verfahren. Die Zwillingsfläche liegt in zwei Zonen, ergibt sich mithin als Durchschnitt derselben. Die erste Zone wird gebildet von den Flächen, deren Indices $\bar{1}\,1\,1$ und $\frac{1}{m}\,\frac{\bar{1}}{m}\,1$, die zweite Zone von den Flächen, deren Indices $1\,1\,1$ und $\frac{1}{m}\,1\,\frac{1}{m}$ sind. Mit Hilfe der Zonengleichung findet man für die Indices von f die Werthe $1\,\bar{1}\,1$. f ist mithin eine Oktaëderfläche.

Drittes Verfahren. Die Oktaëderfläche, welche im System XYZ die Indices $1\,1\,\bar{1}$ hat, erhält nach ihrer Drehung um die Zwillingsaxe durch 60° die Indices $\frac{1}{m}\,1\,\frac{1}{m}$ oder $1\,m\,1$



bezogen auf dasselbe System XYZ. (Es ist das genau dasselbe, als wenn man sagt: Die Fläche, die im System XYZ die Indices $1 1 \bar{1}$ hat, hat im System X'Y'Z' die Indices 1 m 1.)

Fig. 76.



In Fig. 76 sei o' die Fläche, deren Indices 1 m 1, und o die Oktaëderfläche, deren Indices 1 1 1 sind. Die Gleichung von o' ist:

$$\cos o'x = \frac{1}{m} \cos o'y = \cos o'z$$

Daraus

$$m = \frac{\cos o'y}{\cos o'z} = \frac{\cos o'y}{\sin o'y \cos 45} = \frac{\operatorname{ctg} o'y}{\cos 45}$$

Da $o'y = oy - o'o = 15^\circ 47'$ ist, so folgt

$$m = 5$$

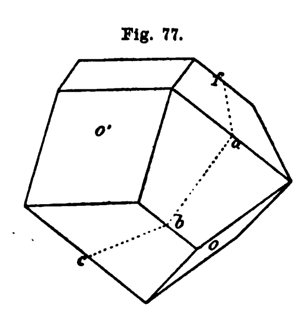
Oben wurde gezeigt, dass, wenn zwei Oktaëder mit einer Oktaëderfläche als Zwillingsfläche verwachsen sind, eine Fläche des zweiten Oktaëders nach der Drehung die Indices 1 5 1 oder das Parameterverhältniss 5 : 1 : 5 erhält. In unserem Falle hat eine Oktaëderfläche $1 1 \bar{1}$ nach der Drehung die Indices 1 5 1 erhalten, folglich ist die Zwillingsfläche die Oktaëderfläche.

Zu demselben Resultate gelangt man auch ohne Zeichnung, wenn man die Gl. 5, S. 225 anwendet.

Zweites Beispiel (Zinkblende).

Die Fig. 77 repräsentirt eine an der Zinkblende häufig vorkommende Combination. Jeder Kantenwinkel ist 120°, daher liegt ∞O vor.

Fig. 77.



Die Fläche des Rhombendodekaëders, die im System XYZ die Indices $0\ 1\ \bar{1}$ hat, hat nach ihrer Drehung um 180° in Bezug auf dasselbe System die Indices $\bar{1}\ \frac{1}{m}\ \frac{\bar{1}}{m}$ oder $\bar{m}\ 1\ \bar{1}$ und bildet dann mit ihrer Nachbarfläche $(\bar{1}\ m\ \bar{1})$ einen Winkel von 120°. Setzt man in der Gl. 16, S. 26

$$\cos w = \frac{h h' + k k' + l l'}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}\,\sqrt{h'^2 + k'^2 + l'^2}}$$

für h k l und h′ k′ l′ die Werthe $\bar{m}\ 1\ \bar{1}$ und $\bar{1}\ m\ \bar{1}$, so erhält man die Gleichung

$$\cos w = \frac{2m + 1}{m^2 + 2} \qquad (w = 180 - 120 = 60)$$

Daraus folgt

$$\sqrt{2}\sin\frac{w}{2} = \frac{m - 1}{\sqrt{m^2 + 2}} = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 2}} - \frac{1}{\sqrt{m^2 + 2}}$$

Setzt man

$$\cos\varphi = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 2}}$$

so ist

$$m = \sqrt{2}\operatorname{ctg}\varphi$$

und

$$\sqrt{2}\sin\frac{w}{2} = \cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}}$$

Setzt man

$$\operatorname{tg}\psi = \sqrt{2}$$

so ist

$$\sqrt{2}\sin\frac{w}{2} = \cos\varphi - \sin\varphi\,.\,\operatorname{ctg}\psi = \frac{\sin(\psi - \varphi)}{\sin\psi}$$

Daraus

$$\sin(\psi - \varphi) = \sqrt{2} \sin\phi \sin\frac{w}{2}$$

Die Rechnung ergibt $\psi = 54^{\circ} 44'$, $\varphi = 19^{\circ} 28$ und $m = 4$.

Die Fläche $0\,1\,\bar{1}$ im System XYZ hat nach ihrer Drehung um 180° bezogen auf dasselbe System die Indices $\bar{4}\,1\,\bar{1}$. Dies sind die Indices einer Fläche des Ikositetraëders $_4O_4$. Setzt man in den Gl. 5, S. 225 für efg die Werthe $0\,1\,\bar{1}$, für e′f′g′ die Werthe $\bar{4}\,1\,\bar{1}$, so kann man die Indices hkl der Zwillingsfläche aus diesen Gl. 5 ermitteln. Man erhält zunächst die drei Gleichungen

$$4 = 2hl - 2hk$$
$$1 = k^2 - l^2 - h^2 - 2kl$$
$$1 = -k^2 + l^2 - h^2 - 2kl$$

Aus den beiden letzten Gleichungen erhält man durch Subtraction:

$$2k^2 = 2l^2 \text{ oder } k^2 = l^2$$

woraus

$$k = \pm 1$$

Von den beiden Werthen von k ist nur der zweite $k = -1$ zu verwerthen; denn setzt man den Werth $k = 1$ in die erste Gleichung, so erhält man $4 = 0$, was nicht möglich ist. Für $k = -1$ geht die erste Gleichung über in

$$hl = 1$$

Durch Division der zwei ersten Gleichungen erhält man für $k = -1$ die Gleichung:

$$1 = \frac{1}{2\frac{l}{h} - \frac{h}{l}}$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\frac{l}{h} = 1 \text{ und } \frac{l}{h} = -\frac{1}{2}$$

Der letzte Werth

$$\frac{l}{h} = -\frac{1}{2}$$

verbunden mit der Gl. $hl = 1$ liefert imaginäre Indices, ist daher nicht zu gebrauchen. Der Werth $\frac{l}{h} = 1$ liefert mit $hl = 1$ die Werthe $h = \pm 1$ und $l = \pm 1$. Die Indices der Zwillingsfläche sind mithin

$$1\,\bar{1}\,1 \text{ oder } \bar{1}\,1\,\bar{1}$$

Diese Indices repräsentiren eine Oktaëderfläche. Die Zwillingsfläche ist mithin eine Oktaëderfläche. Das lehrt hier wiederum schon der blosse Anblick, kann aber auch aus §. 29 erkannt werden.

Anwendung der im §. 24 vorgetragenen Theorien auf das tetragonale Krystallsystem.

Erstes Zwillingsgesetz: Zwillingsfläche ist die Deuteropyramide $P\infty$ oder (1 0 1).

§. 33.

Parallelflächen von mPn.

Die Indices einer Fläche der ditetragonalen Pyramide in Bezug auf XYZ seien

$$1)\ 1\,\frac{1}{n}\,\frac{1}{m} \quad 2)\ \frac{1}{n}\,1\,\frac{1}{m} \quad 3)\ \frac{\bar{1}}{n}\,1\,\frac{1}{m} \quad 4)\ \bar{1}\,\frac{1}{n}\,\frac{1}{m}$$

Welche Werthe haben die Indices, bezogen auf dasselbe System XYZ, nachdem die Fläche um die Zwillingsaxe durch 180° gedreht worden ist? Die gesuchten Indices seien $e'f'g'$.

Erster Fall $\left(1\,\frac{1}{n}\,\frac{1}{m}\right)$. Parameter 1, n, mc.

In den Gl. 5, S. 225 setzen wir $a = b = 1$ und für efg die Werthe $1\,\frac{1}{n}\,\frac{1}{m}$ und für hkl die Werthe 1 0 1.

Dadurch erhalten wir:

$$e' = n\,[m\,(c^2 - 1) + 2] \qquad f' = -\,m\,(c^2 + 1)$$

$$g' = n\,[c^2\,(2m - 1) + 1]$$

Der erste Index bezieht sich auf die X-Axe, der zweite auf die Y-Axe, der dritte auf die Z-Axe. In der Formel mPn ist m stets der Coëfficient der Hauptaxe und kann $\gtrless 1$ sein; n dagegen ist stets > 1 und bezieht sich auf eine Nebenaxe. Aus den Indices erhält man die Ableitungszahlen:

$$\frac{1}{e'}\;\frac{1}{f'}\;\frac{1}{g'}$$

Ist $f' > e'$, so ist $\frac{1}{f'} < \frac{1}{e'}$

Man multiplicire jeden Index mit f'. Die Fläche gehört folglich der Gestalt

$$\frac{f'}{g'}\,P\,\frac{f'}{e'} \text{ an.}$$

Ist $f' < e'$, so ist $\frac{1}{f'} > \frac{1}{e'}$

Man multiplicire jeden Index mit e'. Die Fläche gehört folglich der Gestalt

$$\frac{e'}{g'}\,P\,\frac{e'}{f'} \text{ an.}$$

Ist $f' = e'$, so gehört die Fläche der Gestalt

$$\frac{e'}{g'}\,P \text{ an.}$$

In unserem speciellen Falle ist mithin die Gestalt

$$\frac{m\,(c^2 + 1)}{n\,[c^2\,(2m - 1) + 1]}\,P\,\frac{m\,(c^2 + 1)}{n\,[m\,(c^2 - 1) + 2]}$$

wenn

$$\frac{m\,(c^2 + 1)}{n\,[m\,(c^2 - 1) + 2]} > 1 \text{ ist,}$$

$$\frac{m\,(c^2 - 1) + 2}{c^2\,(2m - 1) + 1}\,P\,\frac{n\,[m\,(c^2 - 1) + 2]}{m\,(c^2 + 1)}$$

wenn

$$\frac{m\,(c^2 + 1)}{n\,[m\,(c^2 - 1) + 2]} < 1 \text{ ist.}$$

[illegible] Parameter n, 1, mc.

[illegible] für efg zu setzen

[illegible]

$$[\text{illegible}] \quad f = - mn(c^2 + 1)$$

$$[\text{illegible}] n(1 - c^2)$$

[illegible] Gestalt die Formel:

$$[\text{illegible}] \; P \; \frac{mn(c^2 + 1)}{2n + m(c^2 - 1)}$$

[illegible]

$$\frac{[\text{illegible}](c^2 - 1)}{[\text{illegible}] - m(c^2 - 1)} > 1$$

[illegible]

$$[\text{illegible}] \; P \; \frac{2n + m(c^2 - 1)}{mn(c^2 + 1)}$$

[illegible]

$$\frac{mn(c^2 - 1)}{[\text{illegible}] - m(c^2 - 1)} < 1 \text{ ist.}$$

[illegible] $\left(\frac{1}{n}, 1, \frac{1}{m}\right)$. Parameter — n, 1, mc.

[illegible] S. 225 setzen wir für efg die Werthe $\overline{m}$, mn, n [illegible]

[illegible]

$$[\text{illegible}] \quad f = - mn(c^2 + 1)$$

$$[\text{illegible}](1 - c^2) - 2mc^2$$

[illegible] findet man leicht für die Gestalt die Formel:

$$[\text{illegible}] \; P \; \frac{mn(c^2 + 1)}{2n - m(c^2 - 1)}$$

[illegible]

$$\frac{[\text{illegible}]}{[\text{illegible}] 1)} > 1$$

[illegible]

$$[\text{illegible}] \; P \; \frac{m(c^2 - 1) - 2n}{mn(c^2 + 1)}$$

wenn

$$\frac{mn(c^2+1)}{2n-m(c^2-1)} < 1 \text{ ist.}$$

Vierter Fall $\left(\bar{1}\,\frac{1}{n}\,\frac{1}{m}\right)$. Parameter -1, n, mc.

In den Gl. 5 setzen wir für efg die Werthe $\overline{m}n$, m, n und erhalten:

$$e' = mn(1-c^2) + 2n \qquad f' = -m(c^2+1)$$
$$g' = n(1-c^2) - 2mnc^2$$

Daraus ergibt sich für die Gestalt die Formel:

$$\frac{m(c^2+1)}{n[c^2(2m+1)-1]} P \frac{m(c^2+1)}{n[m(c^2-1)-2]}$$

wenn

$$\frac{m(c^2+1)}{n[m(c^2-1)-2]} > 1$$

oder

$$\frac{m(c^2-1)-2}{c^2(2m+1)-1} P \frac{n[m(c^2-1)-2]}{m(c^2+1)}$$

wenn

$$\frac{m(c^2+1)}{n[m(c^2-1)-2]} < 1$$

§. 34.

Parallelflächen von mP.

In den Formeln des vorhergehenden Paragraphen setzen wir $n = 1$ und haben dann nur zwei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall $\left(1\,1\,\frac{1}{m}\right)$. Parameter 1, 1, mc.

Die Fläche, welche im System XYZ die Indices $1\,1\,\frac{1}{m}$ hat, hat nach ihrer Drehung um 180°, bezogen auf dasselbe System, die Indices:

$$e' = m(c^2-1) + 2 \qquad f' = -m(c^2+1)$$
$$g' = c^2(2m-1) + 1$$

$$\frac{\ldots - 1)}{\ldots - 1) + 2}$$

$$\ldots > 1$$

$$\frac{\ldots - 1) + 2}{m (c^2 + 1)}$$

$\ldots < 1$ ist.

... Parameter — 1, 1, m c.

... $\frac{\ldots}{m}$ sind nach der Drehung der

$$\ldots = - m (c^2 + 1)$$
$$- \ldots - 2 m c^2$$

... die Formel:

$$\ldots \frac{m (c^2 + 1)}{2 - m (c^2 - 1)}$$

$$\ldots > 1$$

$$\ldots \frac{m (c^2 - 1) - 2}{m (c^2 + 1)}$$

$\ldots < 1$ ist.

§ ...

... von m P ∞.

... setzen wir $n = \infty$ und unter-

Erster Fall $\left(1\ 0\ \frac{1}{m}\right)$. Parameter 1, ∞, m c.

Die Fläche $1\ 0\ \frac{1}{m}$ hat nach ihrer Drehung um 180° die Indices

$$e' = m(c^2 - 1) + 2 \qquad f' = 0 \qquad g' = c^2(2m - 1) + 1$$

Daraus erhalten wir für die Gestalt die Formel:

$$\frac{m(c^2 - 1) + 2}{c^2(2m - 1) + 1} P \infty$$

Zweiter Fall $\left(0\ 1\ \frac{1}{m}\right)$. Parameter ∞, 1, mc.

Nun ist

$$e' = 2 \qquad f' = -m(c^2 + 1) \qquad g' = 1 - c^2$$

Daraus ergibt sich für die Gestalt die Formel:

$$\frac{m(c^2 + 1)}{1 - c^2} P \frac{m(c^2 + 1)}{2}$$

wenn

$$\frac{m(c^2 + 1)}{2} > 1$$

oder

$$\frac{2}{1 - c^2} P \frac{2}{m(c^2 + 1)}$$

wenn

$$\frac{m(c^2 + 1)}{2} < 1 \text{ ist.}$$

Dritter Fall $\left(\bar{1}\ 0\ \frac{1}{m}\right)$. Parameter — 1, ∞, mc.

Nun ist

$$e' = m(1 - c^2) + 2 \qquad f' = 0 \qquad g' = 1 - c^2 - 2mc^2$$

Daraus folgt die Formel

$$\frac{m(c^2 - 1) - 2}{c^2(2m + 1) - 1} P \infty$$

§. 36.

Parallelflächen von ∞ Pn.

In den Formeln des §. 33 setzen wir $m = \infty$ und unterscheiden zwei Fälle:

Erster Fall $\left(1 \frac{1}{n} 0\right)$. Parameter 1, n, ∞.

Die Fläche $1 \frac{1}{n} 0$ hat nach ihrer Drehung um 180° die Indices

$$e' = n(c^2 - 1) \qquad f' = -(c^2 + 1) \qquad g' = 2nc^2$$

Daraus ergibt sich für die Gestalt die Formel:

$$\frac{c^2 + 1}{2nc^2} P \frac{c^2 + 1}{n(c^2 - 1)}$$

wenn

$$\frac{c^2 + 1}{n(c^2 - 1)} > 1$$

$$\frac{n(c^2 - 1)}{2nc^2} P \frac{n(c^2 - 1)}{c^2 + 1}$$

wenn

$$\frac{c^2 + 1}{n(c^2 - 1)} < 1 \text{ ist.}$$

Zweiter Fall $\left(\frac{1}{n} 1\ 0\right)$. Parameter n, 1, ∞.

Nun ergibt sich

$$e' = c^2 - 1 \qquad f' = -n(c^2 + 1) \qquad g' = 2c^2$$

Daraus folgt für die Gestalt die Formel:

$$\frac{n(c^2 + 1)}{2c^2} P \frac{n(c^2 + 1)}{c^2 - 1}$$

§. 37.

Parallelflächen von ∞ P.

Setzen wir in den Formeln des vorhergehenden Paragraphen $n = 1$, so erhalten wir das folgende Resultat.

Die Fläche 1 1 0 hat nach ihrer Drehung um 180° die Indices

$$e' = c^2 - 1 \qquad f' = -(c^2 + 1) \qquad g' = 2c^2$$

Daraus erhält man für die Gestalt die Formel:

$$\frac{c^2 + 1}{2c^2} P \frac{c^2 + 1}{c^2 - 1}$$

§. 38.

Parallelflächen von $\infty P \infty$.

In den Formeln des §. 36 setzen wir $n = \infty$ und erhalten das folgende Resultat.

Die Fläche 1 0 0 hat nach ihrer Drehung um 180° die Indices

$$e' = c^2 - 1 \qquad f' = 0 \qquad g' = 2c^2$$

Daraus ergibt sich für die Gestalt die Formel:

$$\frac{c^2 - 1}{2c^2} P \infty$$

Zweites Zwillingsgesetz: Die Zwillingsfläche ist eine Fläche der Grundpyramide P.

§. 39.

Parallelflächen von mPn.

Wir denken uns zwei ditetragonale Pyramiden nach diesem Gesetze verwachsen und fragen uns: Welche Werthe haben die Indices einer Pyramidenfläche nach ihrer Drehung um 180°, wenn sie vor der Drehung die Werthe

$$1)\ 1 \frac{1}{n} \frac{1}{m} \qquad 2)\ 1 \frac{\bar{1}}{n} \frac{1}{m} \qquad 3)\ \bar{1} \frac{1}{n} \frac{1}{m} \qquad 4)\ \bar{1} \frac{\bar{1}}{n} \frac{1}{m}$$

hatten?

Erster Fall $\left(1 \frac{1}{n} \frac{1}{m}\right)$. Parameter 1, n, mc.

In den Formeln 5, S. 225 setzen wir für efg die Werthe mn, m, n und erhalten für die gesuchten Indices die Werthe:

$$e' = 2mc^2 - mn + 2n \qquad f' = 2mnc^2 - m + 2n$$
$$g' = 2mc^2 (n + 1) - n (2c^2 - 1)$$

Daraus findet man leicht, wie im vorhergehenden Paragraphen gezeigt wurde, für die Gestalten die Formeln.

Zweiter Fall $\left(1 \frac{\bar{1}}{n} \frac{1}{m}\right)$. Parameter 1, —n, mc.

Man findet für e'f'g' die Werthe:

$$e' = - mn - 2mc^2 + 2n \qquad f' = 2mnc^2 + m + 2n$$
$$g' = 2mc^2 (n - 1) + n (1 - 2c^2)$$

Dritter Fall $\left(\bar{1} \frac{1}{n} \frac{1}{m}\right)$. Parameter —1, n, mc.

$$e' = mn + 2mc^2 + 2n \qquad f' = - 2mnc^2 - m + 2n$$
$$g' = - 2mc^2 (n - 1) + n (1 - 2c^2)$$

Vierter Fall $\left(\bar{1} \frac{\bar{1}}{n} \frac{1}{m}\right)$. Parameter —1, —n, mc.

$$e' = mn - 2mc^2 + 2n \qquad f' = m - 2mnc^2 + 2n$$
$$g' = - 2mc^2 (1 + n) + n (1 - 2c^2)$$

Wir unterlassen es hier zu specialisiren, weil es genau so geschieht, wie in den vorhergehenden Paragraphen gezeigt wurde.

Drittes Zwillingsgesetz: Die Zwillingsfläche ist eine Fläche des Prismas ∞P.

Dieses Gesetz ist ohne allen Einfluss auf die holoëdrischen Gestalten, für die hemiëdrischen Gestalten hat es eine Reproduction der holoëdrischen Muttergestalten zur Folge. Die Theorie hat mithin keine Aufgabe zu lösen.

§. 40.

Bestimmung der Zwillingsfläche (Zinnstein).

Erstes Verfahren. Die Fig. 78 repräsentirt eine parallel-perspectivische Projection eines Zwillings, der am Zinnerz häufig vorkommt.

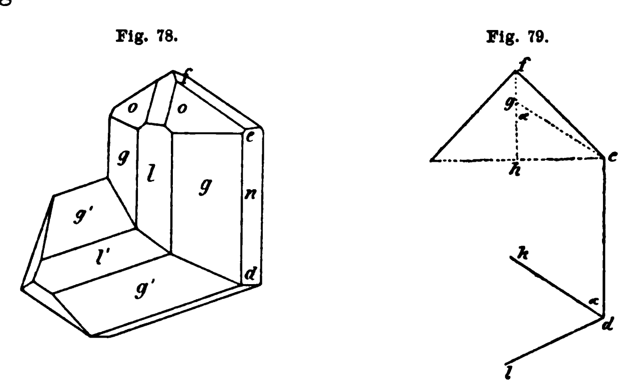


Fig. 78. Fig. 79.

Die Fig. 79 ist ein Durchschnitt durch fed. In Fig. 79 repräsentirt dk die Zwillingsfläche. Die Flächen ed, dk und dl (Fig. 79) sind tautozonal; denn sie schneiden sich in einer Geraden. Wir wissen aber, dass die Zwillingsfläche dk den Winkel der beiden Flächen ld und de halbirt. Dieser Winkel lde ist gleich 112° 7′. Wenn gezeigt werden kann, dass die Linie dk der Linie fe parallel ist, dann muss die Zwillingsfläche die Deuteropyramide P ∞ sein. Ist dk nicht parallel ef, so ist die Zwillingsfläche eine Deuteropyramide mP ∞, und m ist noch zu ermitteln. Ziehen wir die Hilfslinie ge parallel dk, so folgt aus dem ebenen rechtwinkligen Dreieck geh:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{gh}{he} = \frac{mc}{1}$$

denn die Pyramide o in Fig. 78 wird zur Grundpyramide gewählt. Nun ist c = 0,6721 (S. 100) und $\alpha = 56^{0}\,3'\,30''$. Mithin ist

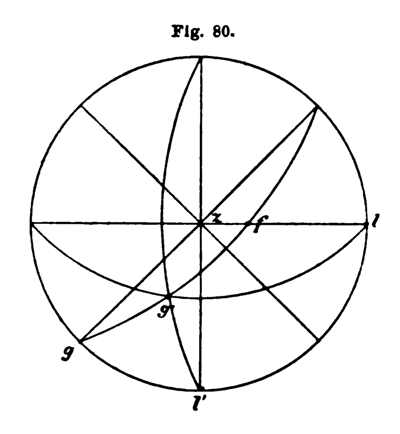
$$m = 1$$

Es fällt folglich der Punkt g in Fig. 79 mit f zusammen; die Linie dk ist parallel ef und die Zwillingsfläche ist die Deuteropyramide P ∞.

Zweites Verfahren. Die Zwillingsfläche soll aus den beiden Winkeln $g'l'$ und $g'g$ ermittelt werden. Die Fläche g' hat die Indices (s. Fig. 80) $1 \frac{\bar{1}}{n} \frac{1}{m}$. Die Gleichung der Fläche g' ist daher

$$\cos g'l' = -n \cos g'l = mc \cos g'z$$

Fig. 80.



Um $g'z$, $g'l$ zu finden, berechne man zunächst das sphärische Dreieck $gg'l'$, in welchem

$$gl' = g'l' = 45^\circ \text{ und } g'g = 46^\circ 28'$$

ist. Die Rechnung ergibt

$$g'l'g = 67^\circ 49' \text{ und } l'gg' = 64^\circ 34'$$

mithin

$$g'l'z = 22^\circ 11' \text{ und } g'gz = 25^\circ 26'$$

Nun ist

$$n = -\frac{\cos g'l'}{\cos g'l} = \frac{\cos g'l'}{\sin g'l' \sin g'l'z} = \frac{\operatorname{ctg} g'l'}{\sin g'l'z} = 2{,}649$$

$$m = \frac{\cos g'l'}{c \sin g'l' \cos g'l'z} = \frac{\operatorname{ctg} g'l'}{c \cos g'l'z} = 1{,}607$$

Die Flächen g, g' und die Zwillingsfläche f (Fig. 80) sind tautozonal. Die Indices der Zwillingsfläche f seien $0\ 1\ \frac{1}{m'}$. Vermöge der Zonengleichung ergibt sich

$$m' = \frac{m(n-1)}{n}$$

Setzt man $m = 1{,}607$ und $n = 2{,}649$, so erhält man

$$m' = 1$$

Die Zwillingsfläche hat die Indices 0 1 1, folglich ist sie die Deuteropyramide $P\infty$.

f ergibt sich auch aus dem Schnitt der beiden Zonen $g g'$ und z l.

Drittes Verfahren. Die Zwillingsfläche soll aus denselben Winkeln $g'g$ und $g'l'$ in anderer Weise ermittelt werden.

Man bestimme die Indices von g' wie vorher. Dreht man das untere Individuum um 180°, so kommt g' in die Lage, in welcher es die Indices $\bar{1}$ 1 0 hat (g gegenüber). Setzt man in den Gl. 5, S. 225 für e f g die Werthe $\bar{1}$ 1 0, für $e' f' g'$ die Werthe $1 \; \frac{\bar{1}}{2{,}649} \; \frac{1}{1{,}607}$ und $a = b = 1$, so kann man die Indices h k l der Zwillingsfläche berechnen. Man erhält zunächst die drei Gleichungen:

$$m n = - c^2 h^2 + l^2 + c^2 k^2 + 2 h k c^2$$

$$- m = - c^2 h^2 - l^2 + c^2 k^2 - 2 h k c^2$$

$$n = 2 c^2 l (k - h)$$

Addirt man die beiden ersten und dividirt die Summe durch die dritte Gleichung, so erhält man

$$\frac{m (n - 1)}{n} = \frac{k}{l} + \frac{h}{l}$$

Der Anblick der Figur lehrt, dass die Indices der Zwillingsfläche die Werthe $0 \; 1 \; \frac{1}{m'}$ haben. Setzt man $h = 0$, $k = 1$ und $l = \frac{1}{m'}$, so ergibt sich $m' = \frac{m (n - 1)}{n} = 1$ wie vorher.

Bestätigt wird diese Untersuchung durch die Resultate des §. 37. Dort wurden zwei Prismenflächen mit der Deuteropyramide $P\infty$ als Zwillingsfläche verwachsen gedacht und es wurde gezeigt, dass die Fläche des Prismas ∞P, wenn sie durch 180° um die Zwillingsaxe gedreht wird, zu der Pyramide

$$\frac{c^2 + 1}{2 c^2} P \frac{c^2 + 1}{c^2 - 1} = {}_{1{,}607} P_{2{,}649} \text{ wird.}$$

Anwendung der vorgetragenen Theorie auf das hexagonale Krystallsystem.

§. 41.

Zwillinge in den holoëdrischen Krystallreihen gehören zu den Seltenheiten; in den hemiëdrischen und tetartoëdrischen Krystallreihen kommen sie aber häufig vor. Zwillinge mit parallelen und nicht parallelen Axen kommen auch hier vor. Die ersteren sind gewöhnlich so verwachsen, als ob die Natur die holoëdrische oder hemiëdrische Stammform reproduciren wollte. Solche Zwillinge bedürfen nicht der mathematischen Behandlung.

Hier beschäftigen wir uns allein mit den Zwillingen, deren Axen nicht parallel sind.

Die Gl. 5, S. 225 gelten auch für dieses System, dem wir, wie in §. 14, S. 112 gezeigt worden ist, rechtwinklige Axen unterlegten, deren Grössenverhältnisse $1 : \sqrt{3} : c$ sind.

In den Gl. 5, S. 225 haben wir daher zu setzen

$$a = 1 \qquad b = \sqrt{3} \qquad c = c$$

und erhalten:

$$1) \left\{ \begin{aligned} e' &= e\,(3h^2c^2 - 3l^2 - k^2c^2) + 2h\,(3lg + kfc^2) \\ f' &= f\,(k^2c^2 - 3l^2 - 3c^2h^2) + 6k\,(lg + hec^2) \\ g' &= g\,(3l^2 - 3c^2h^2 - k^2c^2) + 2c^2l\,(3he + kf) \end{aligned} \right.$$

§. 42.

Erstes Zwillingsgesetz: Die Zwillingsfläche ist eine Fläche der Pyramide m′P.

Die Indices einer Pyramidenfläche von m′P seien $1\;1\;\frac{1}{m'}$ oder $m'\;m'\;1$ (Parameter $1, \sqrt{3}, m'c$). Setzen wir in die vorstehenden Gl. 1 für $h\,k\,l$ die Werthe $m'm'1$, so erhalten wir:

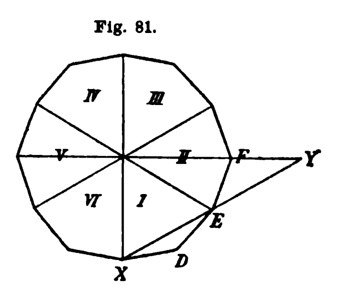
$$2) \left\{ \begin{aligned} e' &= e\,(2m'^2c^2 - 3) + 2m'\,(3g + c^2m'f) \\ f' &= -\,f\,(2m'^2c^2 + 3) + 6m'\,(g + c^2em') \\ g' &= g\,(3 - 4m'^2c^2) + 2c^2m'\,(3e + f) \end{aligned} \right.$$

§. 43.

Parallelflächen von mPn.

Wir denken uns zwei dihexagonale Pyramiden oder zwei hexagonale Skalenoëder nach diesem Zwillingsgesetze verwachsen und gruppiren zunächst die Indices der Flächen XD, DE, EF u. s. w. nach den abwechselnden Sextanten. Vorher mag noch bemerkt werden, dass, wenn O in Fig. 81 der Schnittpunkt der Axen ist, $OX = 1$, $OY = \sqrt{3}$ und OZ (nicht sichtbar) gleich c ist, dass ferner die Indices der Fläche XD

Fig. 81.



$$1 \; \frac{2-n}{n} \; \frac{1}{m} \text{ oder } mn,\; m(2-n),\; n$$

die der Fläche DE

$$\frac{1}{n} \; \frac{2n-1}{n} \; \frac{1}{m} \text{ oder } m,\; m(2n-1),\; n$$

und die der Fläche EF

$$\frac{n-1}{n} \; \frac{n+1}{n} \; \frac{1}{m} \text{ oder } m(n-1),\; m(n+1),\; n \text{ sind.}$$

$$\text{I}\begin{cases} mn,\; m(2-n),\; n \\ m,\; m(2n-1),\; n \end{cases} \qquad \text{II}\begin{cases} -m(n-1),\; m(n+1),\; n \\ m(n-1),\; m(n+1),\; n \end{cases}$$

$$\text{III}\begin{cases} -mn,\; m(2-n),\; n \\ -m,\; m(2n-1),\; n \end{cases} \qquad \text{IV}\begin{cases} -mn,\; -m(2-n),\; n \\ -m,\; -m(2n-1),\; n \end{cases}$$

$$\text{V}\begin{cases} -m(n-1),\; -m(n+1),\; n \\ m(n-1),\; -m(n+1),\; n \end{cases} \qquad \text{VI}\begin{cases} mn,\; -m(2-n),\; n \\ m,\; -m(2n-1),\; n \end{cases}$$

Die in den Sextanten I, III und V liegenden Flächen repräsentiren zugleich die obere Hälfte des positiven Skalenoëders; die in den Sextanten IV, VI und II liegenden Flächen die obere Hälfte des negativen Skalenoëders $-\frac{mPn}{2}$

Erster Fall. Indices mn, $m(2-n)$, n.

$$\text{Parameter } 1, \frac{n\sqrt{3}}{2-n}, mc.$$

Welche Werthe haben die Indices der Fläche mn, $m(2-n)$, n, nachdem diese Fläche durch 180° um die Zwillingsaxe gedreht worden ist? — Wir setzen in den Gl. 2, S. 252 für efg die Werthe mn, $m(2-n)$, n und erhalten für die gesuchten Indices $e'f'g'$ folgende Werthe:

$$e' = 4m'^2mc^2 + 3n(2m' - m)$$

$$f' = 4m'^2mc^2(2n-1) + 3(2m'n + mn - 2m)$$
$$= 4m'^2mnc^2 + 3(2m'n - m) + m(n-1)(4m'^2c^2 + 3)$$

$$g' = 4m'mc^2(n+1) - n(4m'^2c^2 - 3)$$

Zweiter Fall. Indices m, $m(2n-1)$, n.

$$\text{Parameter } n, \frac{n\sqrt{3}}{2n-1}, mc.$$

In den Gl. 2, S. 252 setzen wir für $e\,f\,g$ die Werthe m, $m(2n-1)$, n und erhalten:

$$e' = 4m'^2mnc^2 + 3(2m'n - m)$$
$$f' = 4m'^2mc^2(2-n) + 3(2m'n - 2mn + m)$$
$$g' = 4m'mc^2(n+1) - 4m'^2nc^2 + 3n$$

Dritter Fall. Indices $m(n-1)$, $m(n+1)$, n.

$$\text{Parameter } \frac{n}{n-1}, \frac{n\sqrt{3}}{n+1}, mc.$$

In den Gl. 2, S. 252 setzen wir für $e\,f\,g$ die Werthe $m(n-1)$, $m(n+1)$, n und erhalten:

$$e' = 4m'^2mnc^2 + 3(2m'n - mn + m)$$
$$f' = -4m'^2mc^2(2-n) + 3(2m'n - mn - m)$$
$$g' = +4m'mc^2(2n-1) - 4m'^2nc^2 + 3n$$

Vierter Fall. Indices — m n, m (2 — n), n.

$$\text{Parameter } -1,\ \frac{n\sqrt{3}}{2-n},\ m\,c.$$

Setzt man in den Gl. 2, S. 252 für efg die vorstehenden Indices, so erhält man:

$$e' = -4m'^2 m c^2 (n-1) + 3n(2m' + m)$$
$$f' = -4m'^2 m c^2 (n+1) + 3(2m'n + mn - 2m)$$
$$g' = -4m' m c^2 (2n-1) + 3n - 4m'^2 n c^2$$

Fünfter Fall. Indices — m, m (2 n — 1), n.

$$\text{Parameter } -n,\ \frac{n\sqrt{3}}{2n-1},\ m\,c.$$

Setzt man in den Gl. 2, S. 252 für efg die vorstehenden Indices, so erhält man:

$$e' = 4m'^2 m c^2 (n-1) + 3(2m'n + m)$$
$$f' = -4m'^2 m c^2 (n+1) + 3(2m'n - 2mn + m)$$
$$g' = -4m' m c^2 (-n+2) - 4m'^2 n c^2 + 3n$$

Sechster Fall. Indices — m (n — 1), m (n + 1), n.

$$\text{Parameter } \frac{-n}{n-1},\ \frac{n\sqrt{3}}{n+1},\ m\,c.$$

Setzt man in den Gl. 2, S. 252 für efg die vorstehenden Indices, so erhält man:

$$e' = 4m'^2 m c^2 + 3(mn - m + 2m'n)$$
$$f' = -4m'^2 m c^2 (2n-1) + 3(2m'n - mn - m)$$
$$g' = +4m' m c^2 (2-n) - 4m'^2 n c^2 + 3n$$

Siebenter Fall. Indices m n, — m (2 — n), n.

$$\text{Parameter } 1,\ -\frac{n\sqrt{3}}{2-n},\ m\,c.$$

Setzt man für efg in den Gl. 2, S. 252 die vorstehenden Indices, so erhält man:

$$e' = 4m'^2 m c^2 (n-1) + 3n(2m' - m)$$
$$f' = 4m'^2 m c^2 (n+1) + 3(2m'n + 2m - mn)$$
$$g' = 4m' m c^2 (2n-1) - 4m'^2 n c^2 + 3n$$

Achter Fall. Indices $m, -m(2n-1), n$.

Parameter $n, -\frac{n\sqrt{3}}{2n-1}, mc$.

Setzt man für efg in den Gl. 2, S. 252 die vorstehenden Indices, so erhält man:

$$e' = -4m'^2mc^2(n-1) + 3(2m'n - m)$$
$$f' = 4m'^2mc^2(n+1) + 3(2m'n + 2mn - m)$$
$$g' = -4m'mc^2(n-2) - 4m'^2nc^2 + 3n$$

Neunter Fall. Indices $m(n-1), -m(n+1), n$.

Parameter $\frac{n}{n-1}, \frac{-n\sqrt{3}}{n+1}, mc$.

Setzt man in den Gl. 2, S. 252 für efg die vorstehenden Indices, so erhält man:

$$e' = -4m'^2mc^2 + 3(2m'n - mn + m)$$
$$f' = 4m'^2mc^2(2n-1) + 3(2m'n + mn + m)$$
$$g' = 4m'mc^2(n-2) - 4m'^2nc^2 + 3n$$

Zehnter Fall. Indices $-mn, -m(2-n), n$.

Parameter $-1, \frac{-n\sqrt{3}}{2-n}, mc$.

Setzt man in den Gl. 2, S. 252 für efg die vorstehenden Indices, so erhält man:

$$e' = -4m'^2mc^2 + 3(2m'n + mn)$$
$$f' = -4m'^2mc^2(2n-1) + 3(2m'n + 2m - mn)$$
$$g' = -4m'mc^2(n+1) - 4m'^2nc^2 + 3n$$

Elfter Fall. Indices $-m, -m(2n-1), n$.

Parameter $-n, -\frac{n\sqrt{3}}{2n-1}, mc$.

Setzt man in den Gl. 2, S. 252 für efg die vorstehenden Indices, so erhält man:

$$e' = -4m'^2mnc^2 + 3(2m'n + m)$$
$$f' = -4m'^2mc^2(2-n) + 3(2m'n + 2mn - m)$$
$$g' = -4m'mc^2(n+1) - 4m'^2nc^2 + 3n$$

Zwölfter Fall. Indices — m (n — 1), — m (n + 1), n.

$$\text{Parameter } \frac{-n}{n-1}, \; -\frac{n\sqrt{3}}{n+1}, \; mc.$$

Setzt man in den Gl. 2, S. 252 für efg die vorstehenden Indices, so erhält man:

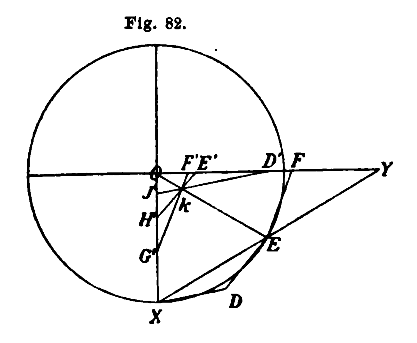
$$e' = -4m'^2 m n c^2 + 3(2m'n + mn - m)$$
$$f' = 4m'^2 m c^2 (2 - n) + 3(2m'n + mn + m)$$
$$g' = -4m' m c^2 (2n - 1) - 4m'^2 n c^2 + 3n$$

§. 44.

Discussion der Resultate des vorhergehenden Paragraphen.

In der Fig. 82 sollen die Linien XD, DE und EF drei Flächen irgend einer dihexagonalen Pyramide mPn repräsentiren. Es fragt sich: Wie kann man aus den Indices e'f'g', die sich auf das angenommene dreizählige Axensystem XYZ beziehen, die Indices für das gewöhnliche vierzählige Axensystem finden?

Fig. 82.



Der Anblick der Fig. 81 lehrt sofort, dass, abgesehen von dem Vorzeichen, alle Flächen der dihexagonalen Pyramiden mPn in Bezug auf XYZ entweder die Indices von XD oder von DE oder von EF haben müssen. Dreht man das eine Individuum um die Zwillingsaxe durch 180°, so müssen die Flächen desselben nach der Drehung in Bezug auf dasselbe Axensystem XYZ Indices haben, die in ihrer Form, abgesehen vom Vorzeichen, entweder mit denen von XD oder von DE oder von EF übereinstimmen.

Die Indices von X D sind: $1, \frac{2-n}{n}, \frac{1}{m}$

Die Ableitungszahlen sind: $1, \frac{n}{2-n}, m$

Die Indices von D E sind: $\frac{1}{n}, \frac{2n-1}{n}, \frac{1}{m}$

Die Ableitungszahlen sind: $n, \frac{n}{2n-1}, m$

Die Indices von E F sind: $\frac{n-1}{n}, \frac{n+1}{n}, \frac{1}{m}$

Die Ableitungszahlen sind: $\frac{n}{n-1}, \frac{n}{n+1}, m$

Nach ihrer Drehung um die Zwillingsaxe kann daher eine Fläche entweder die Lage J′ D′ parallel X D oder H′ E′ parallel D E oder G′ F′ parallel E F haben; in jedem anderen Sextanten hat sie eine analoge Lage. Wir verschieben die Flächen J′ D′, H′ E′ und G′ F′ parallel mit sich selbst so, dass sie die Lage X D, D E und E F annehmen. In dieser Lage sind ihre Indices eben allgemein angegeben worden. Um die Indices für die letztere Lage zu erhalten, müssen wir jeden der drei Indices e′ f′ g′ des vorhergehenden Paragraphen mit einer noch zu suchenden Zahl (Verschiebungsfaktor) multipliciren.

Wir denken uns die Linie X D verlängert, bis sie die Linie O Y in dem (nicht gezeichneten) Punkte D″, die Linie D E verlängert, bis sie die Linie O Y in E″ (nicht gezeichnet) und die Linie O X in D‴, die Linie E F verlängert, bis sie O X in E‴ schneidet. Wir erhalten dann die ähnlichen Dreiecke O J′D′ ∽ O X D″, O H′E′ ∽ O D‴E″ und O G′F′ ∽ O E‴F, aus denen folgt:

1) $\frac{OJ'}{OD'} = \frac{OX}{OD''} = \frac{2-n}{n} < 1$, weil $n \begin{matrix} >1 \\ <2 \end{matrix}$ sein muss,

2) $\frac{OH'}{OE'} = \frac{OD'''}{OE''} = 2n - 1 \begin{matrix} >1 \\ <3 \end{matrix}$, weil $n \begin{matrix} >1 \\ <2 \end{matrix}$ sein muss,

3) $\frac{OG'}{OF'} = \frac{OE'''}{OF} = \frac{n+1}{n-1} > 3$, weil $n \begin{matrix} >1 \\ <2 \end{matrix}$ sein muss.

Die Verhältnisse auf der linken Seite der vorstehenden Gleichungen sind nichts anderes als die Verhältnisse der Ableitungszahlen oder die Quotienten $\frac{f'}{e'}$, die man aus den Gleichungen des vorhergehenden Paragraphen zu entnehmen hat.

4) Ist $\frac{f'}{e'} < 1$, so ist $\frac{f'}{e'} = \frac{2-n}{n}$

5) Ist $\frac{f'}{e'} \begin{matrix} >1 \\ <3 \end{matrix}$, so ist $\frac{f'}{e'} = 2n - 1$

6) Ist $\frac{f'}{e'} > 3$, so ist $\frac{f'}{e'} = \frac{n+1}{n-1}$

7) Ist $f' = e'$, so muss vermöge Gl. 4 und 5 $n = 1$ sein.

Aus diesen Gleichungen findet man n. Hat man n ermittelt, so ist OF, OE'', OD'', OE''' und OD''' zu finden.

Nennen wir den Verschiebungsfaktor λ, so muss z. B.

$$OF' \, . \, \lambda = OF$$

$$\lambda = \frac{OF}{OF'} \text{ sein.}$$

Multiplicirt man jede der drei Ableitungszahlen $\frac{1}{e'}$ $\frac{1}{f'}$ $\frac{1}{g'}$ mit dem Verschiebungsfaktor λ, so ist

$$m = \frac{\lambda}{g'} = \frac{OF}{OF'} \cdot \frac{1}{g'}$$

Da

$$OF' = \frac{1}{f'} \sqrt{3} \text{ und } OF = \frac{n}{n+1} \sqrt{3}$$

ist, so folgt

$$m = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{f'}{g'}$$

In analoger Weise sind die anderen Fälle zu behandeln. Dies sind die Resultate:

8) Ist $\frac{f'}{e'} < 1$, so ist $\frac{f'}{e'} = \frac{2-n}{n}$ und

$$m = \frac{n}{2-n} \frac{f'}{g'} = \frac{e'}{g'} \text{ (s. oben bei 4).}$$

9) Ist $\frac{f'}{e'} \gtrless \frac{1}{3}$, so ist $\frac{f'}{e'} = 2n - 1$ und

$$m = \frac{n}{2n-1} \frac{f'}{g'} = \frac{n e'}{g'}$$

10) Ist $\frac{f'}{e'} > 3$, so ist $\frac{f'}{e'} = \frac{n+1}{n-1}$ und

$$m = \frac{n}{n+1} \frac{f'}{g'} = \frac{n e'}{(n-1) g'}$$

11) Ist $\frac{f'}{e'} = 1$, so ist $n = 1$ und $m = \frac{f'}{g'}$

Nunmehr ist es leicht, die Indices und Ableitungszahlen für die gewöhnlichen vier Axen anzugeben.

Ein specielles Beispiel mag zur weiteren Erläuterung dienen. Es sei $e' = 2$, $f' = 10$ und $g' = 8$.

Da $\frac{f'}{e'} > 3$, so ist vermöge Gl. 10:

$$5 = \frac{n+1}{n-1} \quad \text{mithin } n = \frac{3}{2} \text{ und}$$

$$m = \frac{3}{4} \quad (\text{Formel } \tfrac{3}{4} P \tfrac{3}{2})$$

Man könnte nach der Grösse von Ok fragen, weil Ok in die gewöhnliche Axe OE fällt. Aus ähnlichen Dreiecken z. B. $OkF' \backsim OEF$ erhält man leicht

für die Fläche $F'G'$ den Werth von $Ok = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{f'}$

für die Fläche $E'H'$ den Werth von $Ok = \frac{2n-1}{n} \cdot \frac{1}{f'}$

für die Fläche $D'J'$ den Werth von $Ok = \frac{2-n}{f'}$

§. 45.

Parallelflächen der hexagonalen Pyramide mP oder der Rhomboëder $\pm \frac{mP}{2} = \pm mR$.

Setzen wir in den Resultaten des §. 43 für n den Werth 1, so erhalten wir die Indices $e' f' g'$ der Fläche, die

vor ihrer Drehung in Bezug auf dasselbe Axensystem die Indices efg hatte.

Erster Fall. Sextant I (Fig. 81).

Indices der Fläche XE: $1\ 1\ \frac{1}{m}$. Parameter $1, \sqrt{3}, m\,c$.

$$e' = 4m'^2mc^2 + 3\,(2m' - m)$$
$$f' = 4m'^2mc^2 + 3\,(2m' - m)$$
$$g' = 8m'mc^2 - 4m'^2c^2 + 3$$

Zweiter Fall. Sextant IV (Fig. 81).

Indices $\bar{1}\,\bar{1}\,\frac{1}{m}$. Parameter $-1, -\sqrt{3}, m\,c$.

$$e' = -4m'^2mc^2 + 3\,(2m' + m)$$
$$f' = -4m'^2mc^2 + 3\,(2m' + m)$$
$$g' = -8m'mc^2 - 4m'^2c^2 + 3$$

Dritter Fall. Sextant II (Fig. 81).

Indices: $0\ 2\ \frac{1}{m}$. Parameter $\infty, \frac{\sqrt{3}}{2}, m\,c$.

$$e' = 4m'^2mc^2 + 6m' = 2m'\,(3 + 2m'mc^2)$$
$$f' = -4m'^2mc^2 + 6\,(m' - m)$$
$$g' = 4m'mc^2 - 4m'^2c^2 + 3$$

Vierter Fall. Sextant V (Fig. 81).

Indices $0\ \bar{2}\ \frac{1}{m}$. Parameter $\infty, \frac{-\sqrt{3}}{2}, m\,c$.

$$e' = -4m'^2mc^2 + 6m'$$
$$f' = 4m'^2mc^2 + 6\,(m + m')$$
$$g' = -4m'mc^2 - 4m'^2c^2 + 3$$

Fünfter Fall. Sextant III.

Indices $\bar{1}\ 1\ \frac{1}{m}$. Parameter $-1, \sqrt{3}, m\,c$.

$$e' = 3\,(2m' + m)$$
$$f' = -8m'^2mc^2 + 3\,(2m' - m)$$
$$g' = -4m'mc^2 - 4m'^2c^2 + 3$$

Sechster Fall. Sextant VI.

Indices $1\,\bar{1}\,\frac{1}{m}$. Parameter 1, $-\sqrt{3}$, m c.

$$e' = 3\ (2m' - m)$$
$$f' = 8m'^2 m c^2 + 3\ (2m' + m)$$
$$g' = 4m' m c^2 - 4m'^2 c^2 + 3$$

§. 46.

Discussion der Resultate des vorhergehenden Paragraphen.

Ein Blick auf die vorstehenden Indices lehrt, dass sie im Allgemeinen Skalenoëderflächen entsprechen; denn die Indices $e' f'$ einer Rhomboëderfläche müssen einander gleich sein.

Erster Fall. Die Indices e' und f' auf S. 261 sind einander gleich. In diesem Falle repräsentiren die Indices $e' f' g'$ eine Rhomboëderfläche. Um die Formel des Rhomboëders zu erhalten, bilden wir aus den Indices die Ableitungszahlen und verschieben die Rhomboëderfläche parallel mit sich selbst, bis sie die X-Axe in der Entfernung 1 schneidet. Wir multipliciren zu dem Zwecke jede Ableitungszahl mit $4m'^2 m c^2 + 3\ (2m' - m)$. Das Verhältniss der Ableitungszahlen ist alsdann:

$$1 : 1 : \frac{4m'^2 m c^2 + 3\ (2m' - m)}{8m' m c^2 - 4m'^2 c^2 + 3}$$

Die Formel ist

$$\frac{4m'^2 m c^2 + 3\ (2m' - m)}{8m' m c^2 - (4m'^2 c^2 - 3)}\, R$$

Ist $8m' m c^2 = 4m'^2 c^2 - 3$ so geht vorstehende Formel in ∞R über.

Ist $4m'^2 m c^2 + 3\ (2m' - m) = o$, so geht sie über in o P.

Ist $8m' m c^2 > 4m'^2 c^2 - 3$, so befindet sich das Rhomboëder in analoger Stellung.

Ist $8m' m c^2$ [illegible] $m'^2 c^2 - 3$, so befindet es sich in antiloger Stellung.

Zweiter Fall. Die Indices e' und f' sind gleich; mithin repräsentiren die Indices $e'f'g'$ eine Rhomboëderfläche. Die Formel des Rhomboëders ist:

$$\frac{-4m'^2mc^2 + 3(2m' + m)}{-8m'mc^2 - 4m'^2c^2 + 3} R = \frac{4m'^2mc^2 - 3(2m' + m)}{8m'mc^2 + 4m'^2c^2 - 3} R$$

Discussion wie vorher.

Dritter bis sechster Fall. Die Indices $e'f'g'$ repräsentiren eine Skalenoëderfläche. Die Discussion ist wie oben S. 259.

§. 47.

Parallelflächen der Deuteropyramiden mP_2.

In den Resultaten des §. 43 setzen wir $n = 2$ und erhalten:

Erster Fall. Indices m 0 1. Parameter 1, ∞, mc.

$$e' = 2m'^2mc^2 + 3(2m' - m) \qquad f' = 6m'(1 + m'mc^2)$$
$$g' = 6m'mc^2 - (4m'^2c^2 - 3)$$

Zweiter Fall. Indices $\bar{m}$ 0 1. Parameter −1, ∞, mc.

$$e' = 2m'^2mc^2 + 3(2m' + m) \qquad f' = 6m'(1 - m'mc^2)$$
$$g' = -6m'mc^2 + 3 - 4m'^2c^2$$

Dritter Fall. Indices m, 3m, 2. Parameter 2, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, mc.

$$e' = 8m'^2mc^2 + 3(4m' - m) \qquad f' = 3(4m' - 3m)$$
$$g' = 12m'mc^2 - 8m'^2c^2 + 6$$

Vierter Fall. Indices −m, 3m, 2. Parameter −2, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, mc.

$$e' = 4m'^2mc^2 + 3(4m' + m) \quad f' = -12m'^2mc^2 + 3(4m' - 3m)$$
$$g' = -8m'^2c^2 + 6$$

Fünfter Fall. Indices m, −3m, 2.

Parameter 2, $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, mc.

$$e' = -4m'^2mc^2 + 3(4m' - m)$$
$$f' = 12m'^2mc^2 + 3(4m' + 3m) \qquad g' = -8m'^2c^2 + 6$$

Sechster Fall. Indices $-m$, $-3m$, 2.

$$\text{Parameter } -2,\ \frac{-2\sqrt{3}}{3},\ mc.$$

$$e' = -8m'^2mc^2 + 3(4m' + m) \qquad f' = 3(4m' + 3m)$$

$$g' = -12m'mc^2 - 8m'^2c^2 + 6$$

Die Discussion dieser Werthe ist genau so, wie oben gelehrt wurde. Die weitere Specialisirung unterlassen wir.

§. 48.

Zweites Zwillingsgesetz: Die Zwillingsfläche ist oP.

Nach diesem Gesetz sind die meisten hexagonalen Zwillinge gebildet. Wirkliche Zwillinge sind nach diesem Gesetz jedoch nur für hemiëdrische Formen möglich.

Setzen wir in den Gl. 1, S. 252 für hkl die Indices des basischen Hauptschnitts: 0 0 1, so erhalten wir die Gleichungen:

$$e' = -e \qquad f' = -f \qquad g' = g$$

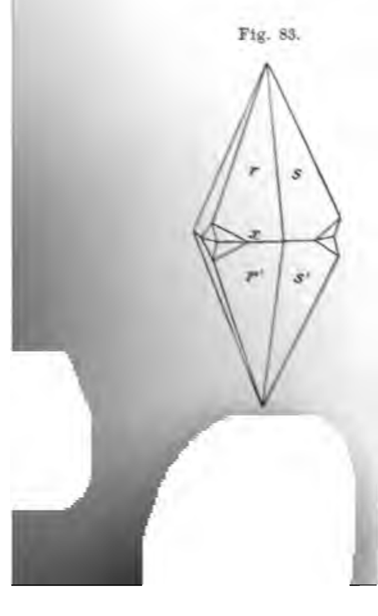
ein Resultat, das auch die blosse Anschauung schon liefert. Dieses Zwillingsgesetz hat daher zur Folge, dass die beiden hemiëdrischen Gestalten ihre Muttergestalt zu reproduciren suchen.

§. 49.

Bestimmung der Zwillingsfläche.

Erstes Beispiel (Calcit).

Fig. 83.



Erstes Verfahren. Die Fig. 83 repräsentirt eine am Calcit beobachtete Zwillingsbildung. Der blosse Anblick der Fig. 83 lehrt hier schon, dass die Zwillingsfläche der basische Hauptschnitt oP ist. — Durch Rechnung erhalten wir dasselbe Resultat auf folgende Weise. Die Zwillingsfläche liegt in den beiden Zonen r r′ und s s′, ergibt sich mithin vermöge der Zonengleichung. Die Indices von r sind: mn, m (2 — n), n

„ „ „ r′ „ mn, m (2 — n), — n

„ „ „ s „ m (n — 1), m (n + 1), n

„ „ „ s′ „ m (n — 1), m (n + 1), — n

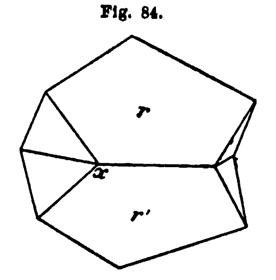
Vermöge Gl. 5, S. 9 erhält man als Indices des Durchschnittspunktes beider Zonen: 0 0 1. Dies sind die Indices des basischen Hauptschnitts.

Zweites Verfahren. Im §. 48 wurde gezeigt, dass, wenn zwei hemiëdrische Formen mit der Zwillingsfläche o P verwachsen sind, die Indices $e f g$ des einen Individuums nach der Drehung durch 180° in die Indices $\bar{e}\ \bar{f}\ g$ oder $e\ f\ \bar{g}$ übergehen. In unserem Falle sind zwei Skalenoëder verwachsen, und wie die vorstehenden Indices lehren, sind die Indices $e f g$ der Fläche r z. B. nach der Drehung durch 180°, übergegangen in $e f \bar{g}$ [1]), folglich ist die Zwillingsfläche der basische Hauptschnitt o P.

Zweites Beispiel (Calcit).

Erstes Verfahren. Die Fig. 84 repräsentirt eine am Calcit beobachtete Zwillingsbildung. Der Austrittspunkt der X-Axe ist durch x bezeichnet. Auch hier lehrt schon der blosse Anblick der Fig. 84, dass die Zwillingsfläche der basische Hauptschnitt ist. Durch Rechnung kann die Zwillingsfläche in folgender Weise ermittelt werden.

Fig. 84.



Die Flächen r r' und die Zwillingsfläche sind tautozonal. Die r und r' entsprechenden, nicht gezeichneten Flächen rechts hinten von r und r' und die Zwillingsfläche sind gleichfalls tautozonal. Die Zwillingsfläche liegt somit in zwei Zonen und ergibt sich folglich vermöge der Gl. 5, S. 9 als Durchschnitt derselben.

Die Indices von r sind 1 1 1.

Die Indices von r' sind $1\ 1\ \bar{1}$.

Die Indices der zwei rechts hinten, r und r' entsprechenden Flächen sind $\bar{1}\ 1\ 1$ und $\bar{1}\ 1\ \bar{1}$.

---

[1]) Die Fläche r kommt nach ihrer Drehung durch 180° in die Lage, in welcher sie der Fläche r' parallel ist.

Vermöge der Gl. 5, S. 9 erhält man für die Indices der Zwillingsfläche die Werthe 0 0 1. Dies sind die Indices des basischen Hauptschnitts.

Auch das zweite Verfahren, das im ersten Beispiel zur Anwendung kam, kann hier und zwar mit denselben Worten angewandt werden.

Zweites Verfahren. Berechnung der Zwillingsfläche mit Hilfe des Winkels $r:r' = 90$. Dieser Winkel $r:r'$ wird durch die Zwillingsfläche halbirt. Sind die Indices der Zwillingsfläche h k l und die Indices der Fläche r gleich 1 1 1, so ist vermöge Gl. 17, S. 26

$$\cos 45 = \frac{3\,l^2 + c^2 k + 3\,c^2 h}{\sqrt{3\,l^2 + k^2 c^2 + 3\,c^2 h^2}\,\sqrt{4\,c^2 + 3}}$$

Da die Flächen r r′ und die Zwillingsfläche tautozonal sind, so muss vermöge der Zonengleichung

$$k = h \text{ sein.}$$

Setzen wir $l = 1$, so ist

$$\cos 45 = \frac{3 + 4\,c^2 h}{\sqrt{4\,c^2 + 3}\,\sqrt{3 + 4\,c^2 h}} = \frac{\sqrt{4\,c^2 h + 3}}{\sqrt{4\,c^2 + 3}}$$

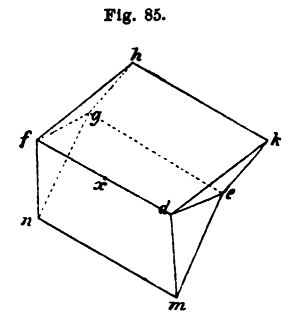
Nun ist $c = 0{,}8543$, folglich ergibt sich aus vorstehender Gleichung:

$$h = 0 = k$$

Die Zwillingsfläche ist der basische Hauptschnitt.

Drittes Beispiel (Calcit).

Fig. 85.



Erstes Verfahren. Die Fig. 85 repräsentirt eine andere, am Calcit beobachtete Zwillingsbildung. Der Austrittspunkt der X-Axe ist durch x bezeichnet. Der einspringende Winkel der beiden Zwillingsflächen ist $141^0\,46'$. Der Polkantenwinkel (h k) ist $105^0\,5'$. Daraus lässt sich der Winkel berechnen, den die Fläche f g h mit der Kante h k bildet. Er ist $190^0\,7'$.

Nun wissen wir, dass die Zwillingsfläche den Winkel 141° 46′ halbirt. Die Hälfte dieses Winkels ist 70° 53′ und diese Hälfte ergänzt den Winkel 109° 7′ zu 180°; mithin ist die Zwillingsfläche der Kante kh parallel. Das lehrt auch schon der blosse Anblick. Da der Polkantenwinkel 105° 5′ ist, so liegt das Grundrhomboëder R vor. Die Polkante hk wird aber abgestumpft durch das Rhomboëder $-\frac{1}{2}$ R. Die Zwillingsfläche ist mithin eine Fläche des Rhomboëders $-\frac{1}{2}$ R.

Zweites Verfahren. Lassen wir die X-Axe mitten durch die Linie dm gehen, so sind die Indices der Fläche dem gleich 1 1 1, die der Fläche dek gleich $1\ 1\ \frac{\bar{1}}{m}$. Die Indices der Zwillingsfläche seien $\bar{h}\,\bar{k}\,l$ oder $h\,k\,\bar{l}$. Da die drei genannten Flächen tautozonal sind, so folgt vermöge der Zonengleichung:

$$h - k = 0 \quad \text{folglich } h = k$$

Der einspringende Winkel 141° 46′ wird durch die Zwillingsfläche halbirt. Der Cosinus des Winkels 109° 7′, den die Normalen der Zwillingsfläche und der Fläche dem bilden, ist:

$$\cos 109^\circ 7' = \frac{-3\,l l' + c^2 k k' + 3\,c^2 h h'}{\sqrt{3\,l^2 + c^2 k^2 + 3\,c^2 h^2}\,\sqrt{3\,l'^2 + c^2 k'^2 + 3\,c^2 h'^2}}$$

Setzen wir in diese Gleichung

$$h = k = 1 \text{ und } h' = k' = l' = 1$$

so erhalten wir die Gleichung

$$\sqrt{4\,c^2 + 3}\,\cos 109^\circ 7' = \frac{-3\,l + 4\,c^2}{\sqrt{3\,l^2 + 4\,c^2}}$$

$$= \frac{-3\,l}{\sqrt{3\,l^2 + 4\,c^2}} + \frac{4\,c^2}{\sqrt{3\,l^2 + 4\,c^2}}$$

Setzt man

$$\frac{\sqrt{3}\,.\,l}{\sqrt{3\,l^2 + 4\,c^2}} = \cos\varphi \text{ und } \operatorname{ctg}\alpha = \frac{2\,c}{\sqrt{3}}$$

so ist

$$\sin(\varphi - \alpha) = \frac{\sin\alpha\,\cos 109^\circ 7'\,\sqrt{4\,c^2 + 3}}{\sqrt{3}} \text{ und } \frac{1}{l} = \frac{\sqrt{3}\,\operatorname{tg}\varphi}{2\,c}$$

Setzt man c = 0,8543, so erhält man

$$\alpha = 45^\circ 23' \qquad \varphi = 26^\circ 16' \text{ oder } 115^\circ 30'$$

$$\frac{1}{l} = +0,5 \text{ oder } \frac{1}{l} = -2,0965$$

Der letzte Werth ist irrational und negativ, folglich zu verwerfen. Die Indices der Zwillingsfläche sind daher $1\,1\,\bar{2}$ oder $\bar{1}\,\bar{1}\,2$. Die Zwillingsfläche ist eine Fläche des Rhomboëders $-\frac{1}{2}R$.

Anwendung der Theorie auf das rhombische Krystallsystem.

Erstes Zwillingsgesetz: Zwillingsfläche eine Fläche von ∞P.

§. 50.

Parallelflächen von mP.

Wir denken uns zwei rhombische Pyramiden mP nach diesem Zwillingsgesetze verwachsen und suchen die Indices e′f′g′ einer Pyramidenfläche, die vor ihrer Drehung durch 180°, bezogen auf dasselbe Axensystem, die Indices efg hatte. Zwei Fälle haben wir zu berücksichtigen.

Erster Fall. Indices m m 1. Parameter a, 1, mc.

Wir setzen in den Gl. 5, S. 225 für hkl die Werthe 1 1 0 und für efg die Werthe m m 1 und erhalten:

$$e' = m \qquad f' = m \qquad g' = -1$$

Diese Indices entsprechen einer Fläche der Pyramide mP.

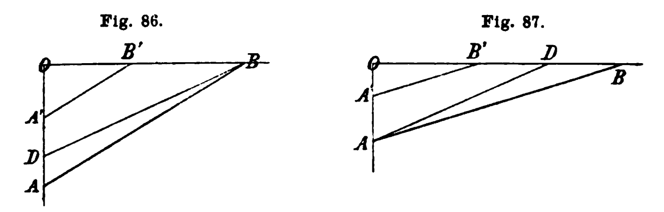
Zweiter Fall. Indices $\bar{m}$ m 1. Parameter —a, 1, mc.

Für efg setzen wir in den Gl. 5, S. 225: $\bar{m}$ m 1 und erhalten:

$$e' = mc^2(3a^2 - 1) \quad f' = -mc^2(3 - a^2) \quad g' = -c^2(1 + a^2)$$

Da die Brachydiagonale a stets kleiner als 1 ist, so ist $3a^2 - 1 < 3 - a^2$.

Die drei Indices sind an Grösse verschieden. Es liegt mithin der allgemeinste Fall vor. Die drei Indices $e' f' g'$ müssen entweder eine Fläche der Brachypyramiden $m\breve{P}n$ oder der Makropyramiden $m\bar{P}n$ repräsentiren. Die Discussion der drei Gleichungen hat zu zeigen, ob wir es mit Brachy- oder Makropyramiden zu thun haben. Zunächst bilden wir die Ableitungszahlen (die reciproken Werthe der Indices). Multipliciren wir die erste Ableitungszahl $\frac{1}{e'}$ mit a und die letzte $\frac{1}{g'}$ mit c, so haben wir die Parameter der durch 180° gedrehten Fläche.



In den Figuren 86 und 87 sei

$$OA' = \frac{1}{e'} a \text{ und } OB' = \frac{1}{f'} \cdot b = \frac{1}{f'} \cdot 1 = \frac{1}{f'}$$

In der Fig. 86 sei $OD = a$ und $OB = b = 1$; in der Fig. 87 sei $OA = a$ und $OD = b = 1$. Hat die gedrehte Fläche die Lage A'B' der Fig. 86, so muss sie, da $n > 1$ ist, bis zum Punkte B parallel mit sich selbst bis AB verschoben werden und gehört, wie der Anblick der Fig. 86 lehrt, einer Brachypyramide $m\breve{P}n$ an; hat sie dagegen die Lage A'B' der Fig. 87, so muss sie parallel mit sich selbst bis zum Punkte A verschoben werden und gehört einer Makropyramide $m\bar{P}n$ an.

Aus beiden Fig. 86 und 87 folgt:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{af'}{e'}$$

Für Fig. 86 erhält man, da $OB = 1$ ist,

$$OA = \frac{af'}{e'}$$

Da $OA > OD$ oder $OA > a$ ist, so muss für die **Brachypyramiden**

$$\frac{f'}{e'} > 1$$

oder $f' > e'$ sein.

Für Fig. 87 ist, da $OA = a$ ist,

$$OB = \frac{e'}{f'}$$

Da $OB > OD$ oder $OB > 1$ ist, so muss für die **Makropyramiden**

$$\frac{e'}{f'} > 1 \text{ oder } \frac{f'}{e'} < 1$$

oder $f' < e'$ sein.

Sind mithin die [illegible] ungleich und ist $f' > e'$, so liegt eine Brachypyramide [illegible] $f' < e'$, so liegt eine Makropyramide vor. Ist $f' = e'$, so liegt eine Pyramide mP vor.

Um die Formel der Brachypyramide $f' > e'$ zu erhalten, hat man die [illegible] $\frac{1}{e'}$ $\frac{1}{f'}$ und $\frac{1}{g'}$ mit f' zu multipliciren.

Ist $f' > e'$, so ist die Formel der **Brachypyramide**

$$[illegible]$$

Ist $f' < e'$, so ist die Formel der **Makropyramide**

$$[illegible] \bar{P} \frac{e'}{f'}$$

Ist $f' = e'$, so liegt die Pyramide $\frac{e'}{g'}$ P vor.

[illegible] auf unseren speciellen Fall an, [illegible] $f' > e'$) die Indices einer Fläche der [illegible] $\frac{[illegible] - a^2)}{[illegible] - 1}$ $\breve{P}$ $\frac{3 - a^2}{3a^2 - 1}$ sind.

[illegible] geht diese Pyramide über in das [illegible]

§. 51.

Parallelflächen der Makropyramiden $m\bar{P}n$.

Wir unterscheiden auch hier zwei Fälle.

Erster Fall. Indices mn, m, n. Parameter a, n, mc.

In den Gl. 5, S. 225 setzen wir 1 1 0 für hkl und mn, m, n für efg und erhalten:

$$e' = m\,[n + a^2\,(2 - n)] \qquad f' = m\,[(2n - 1) + a^2]$$
$$g' = -n\,(a^2 + 1)$$

Da $(2n - 1) + a^2 > n + a^2\,(2 - n)$ ist, weil daraus folgt, dass $a < 1$ ist, so ist $f' > e'$; mithin sind $e'f'g'$ die Indices einer Fläche der Brachypyramide

$$\frac{m\,(2n + a^2 - 1)}{n\,(a^2 + 1)}\,\breve{P}\,\frac{2n + a^2 - 1}{n + a^2\,(2 - n)}$$

Zweiter Fall. Indices mn, $\bar{m}$, n. Parameter a, — n, mc.

In den Gl. 5, S. 225 setzen wir 1 1 0 für hkl und mn, $\bar{m}$, n für efg und erhalten:

$$e' = m\,[n - a^2\,(n + 2)] \qquad f' = m\,(2n - a^2 + 1)$$
$$g' = -n\,(1 + a^2)$$

Da $2n - a^2 + 1 > n - a^2 n - 2a^2$ ist, weil daraus folgt, dass $n + a^2 + na^2 + 1 > 0$ ist, so ist $f' > e'$; mithin sind $e'f'g'$ die Indices einer Fläche der Brachypyramide

$$\frac{m\,[2n - a^2 + 1]}{n\,(1 + a^2)}\,\breve{P}\,\frac{2n - a^2 + 1}{n - a^2\,(n + 2)}$$

Ist
$$n = \frac{2a^2}{1 - a^2}$$

so geht diese Pyramide über in das Brachydoma

$$\frac{m\,(a^2 + 1)}{2a^2}\,\breve{P}\infty$$

§. 52.

Parallelflächen der Brachypyramiden $m\breve{P}n$.

Erster Fall. Indices m, mn, n. Parameter na, 1, mc.

In den Gl. 5, S. 225 setzen wir 1 1 0 für hkl und m, mn, n für efg und erhalten:

$$e' = m\,[(2n-1)\,a^2+1] \qquad f' = m\,[n a^2 - n + 2]$$
$$g' = -n\,(1+a^2)$$

Da $(2n-1)\,a^2+1 > n a^2 - n + 2$, weil daraus folgt $n > 1$, so ist $e' > f'$. Mithin sind $e' f' g'$ die Indices einer Fläche der Makropyramide

$$\frac{m\,[(2n-1)\,a^2+1]}{n\,(1+a^2)}\,\bar{P}\,\frac{a^2\,(2n-1)+1}{n a^2 - n + 2}$$

Zweiter Fall. Indices $\bar{m}$, mn, n. Parameter $-na$, 1, mc.

Wir setzen in den Gl. 5, S. 225 nun $\bar{1}\,1\,0$ für hkl und $\bar{m}$, mn, n für $e\,f\,g$ und erhalten:

$$e' = m\,(2 n a^2 + a^2 - 1) \qquad f' = -m\,(n + 2 - n a^2)$$
$$g' = -n\,(1+a^2)$$

Da hier $2 n a^2 + a^2 - 1 \gtreqless n + 2 - n a^2$ sein kann, so haben wir drei specielle Fälle zu unterscheiden:

α) $2 n a^2 + a^2 - 1 > n + 2 - n a^2$ oder $a^2\,(3n+1) > 3 + n$ oder $e' > f'$.

In diesem Falle sind $e' f' g'$ die Indices einer Fläche der Makropyramide

$$\frac{m\,(2 n a^2 + a^2 - 1)}{n\,(1+a^2)}\,\bar{P}\,\frac{2 n a^2 + a^2 - 1}{n + 2 - n a^2}$$

β) $a^2\,(3n+1) = 3 + n$ oder $e' = f'$.

In diesem Falle sind $e' f' g'$ die Indices einer Fläche der Pyramide

$$\frac{m\,(n+1)}{2n}\,P$$

γ) $a^2\,(3n+1) < 3 + n$ oder $e' < f'$.

In diesem Falle sind $e' f' g'$ die Indices einer Fläche der Brachypyramide

$$\frac{m\,(n + 2 - n a^2)}{n\,(1+a^2)}\,\breve{P}\,\frac{n + 2 - n a^2}{2 n a^2 + a^2 - 1}$$

Für
$$a^2 = \frac{1}{2n+1}$$

geht diese Brachypyramide über in das Brachydoma

$$\frac{m\,(n+1)}{n}\,\breve{P}\infty$$

Die weitere Specialisirung übergehen wir.

Zweites Zwillingsgesetz: Die Zwillingsfläche ist eine Fläche des Brachydomas $m' \breve{P} \infty$.

§. 53.

Parallelflächen der Pyramiden m P.

Wir denken uns zwei Pyramiden m P nach diesem Zwillingsgesetze verwachsen und suchen die Indices $e' f' g'$ einer Pyramidenfläche, die von ihrer Drehung durch 180° in Bezug auf ein und dasselbe Axensystem die Indices e f g hatte.

Erster Fall. Indices m m 1. Parameter a, 1, m c.

In den Gl. 5, S. 225 setzen wir 0 m′ 1 für h k l und m m 1 für e f g und erhalten:

$$e' = -m(1 + m'^2 c^2) \qquad f' = m m'^2 c^2 - m + 2m'$$
$$g' = 1 - m'^2 c^2 + 2 m m' c^2$$

α) $m(1 + m'^2 c^2) > m m'^2 c^2 - m + 2m'$ oder $m > m'$ das ist $e' > f'$, so sind $e' f' g'$ die Indices der Makropyramide

$$\frac{m(1 + m'^2 c^2)}{2 m m' c^2 + 1 - m'^2 c^2} \bar{P} \frac{m(1 + m'^2 c^2)}{m m'^2 c^2 - m + 2m'}$$

β) $m < m'$, das ist $e' < f'$. Jetzt sind $e' f' g'$ die Indices der Brachypyramide

$$\frac{m m'^2 c^2 - m + 2m'}{1 - m'^2 c^2 + 2 m m' c^2} \breve{P} \frac{m m'^2 c^2 - m + 2m'}{m(1 + m'^2 c^2)}$$

γ) $m = m'$, das ist $f' = e'$. In diesem Falle sind $e' f' g'$ die Indices der Pyramide $\frac{e'}{g'} P$

Zweiter Fall. Indices m, $\bar{m}$, 1. Parameter a, — 1, m c.

In den Gl. 5, S. 225 setzen wir 0 m′ 1 für h k l und m $\bar{m}$ 1 für e f g und erhalten:

$$e' = -m(1 + m'^2 c^2) \qquad f' = -m m'^2 c^2 + m + 2m'$$
$$g' = 1 - m'^2 c^2 - 2 m' m c^2$$

α) Ist $e' > f'$ oder $m m' c^2 > 1$, so sind $e' f' g'$ die Indices der Makropyramide $\frac{e'}{g'} \bar{P} \frac{e'}{f'}$

β) Ist $e' < f'$ oder $m m' c^2 < 1$, so sind $e' f' g'$ die Indices der Brachypyramide $\frac{f'}{g'} \breve{P} \frac{f'}{e'}$

γ) Ist $e' = f'$ oder $m m' c^2 = 1$, so sind $e' f' g'$ die Indices der Pyramide $\frac{e'}{g'} P$

§. 54.

Parallelflächen der Makropyramiden $m \bar{P} n$.

Erster Fall. Indices $m n$, m, n. Parameter a, n, $m c$.

$$e' = m n (1 + m'^2 c^2) \qquad f' = m m'^2 c^2 - m + 2 m' n$$
$$g' = n - m'^2 n c^2 + 2 m' m c^2$$

α) $e' > f'$, so sind $e' f' g'$ die Indices einer Fläche der Makropyramide $\frac{e'}{g'} \bar{P} \frac{e'}{f'}$

β) $e' < f'$, so sind $e' f' g'$ die Indices einer Fläche der Brachypyramide $\frac{f'}{g'} \breve{P} \frac{f'}{e'}$

γ) $e' = f'$, so sind $e' f' g'$ die Indices einer Fläche der Pyramide $\frac{e'}{g'} P$

Zweiter Fall. Indices $m n$, $\bar{m}$, n. Parameter a, $-n$, $m c$.

$$e' = - m n (1 + m'^2 c^2) \qquad f' = - m m'^2 c^2 + m + 2 m' n$$
$$g' = n - m'^2 n c^2 - 2 m' m c^2$$

Drei Fälle wie vorher.

§. 55.

Parallelflächen der Brachypyramiden $m \breve{P} n$.

Erster Fall. Indices m, $m n$, n. Parameter $n a$, 1, $m c$.

$$e' = - m (1 + m'^2 c^2) \qquad f' = m m'^2 n c^2 - m n + 2 m' n$$
$$g' = n - m'^2 n c^2 + 2 m' m n c^2$$

Drei Fälle. Discussion wie vorher.

Zweiter Fall. Indices m, — mn, n. Parameter na, — 1, mc.

$$e' = -m(1 + m'^2c^2) \qquad f' = -mm'^2nc^2 + mn + 2m'n$$
$$g = n - m'^2nc^2 - 2m'mnc^2$$

Drei Fälle, wie oben.

§. 56.

Drittes Zwillingsgesetz: Die Zwillingsfläche ist eine Fläche des Makrodomas $m'\bar{P}\infty$.

Parallelflächen von mP.

Erster Fall. Indices m m 1. Parameter a, 1, mc.

In den Gl. 5, S. 225 setzen wir m′ 0 1 für hkl und m m 1 für efg und erhalten

$$e' = mm'^2c^2 - ma^2 + 2m'a^2 \qquad f' = -m(a^2 + m'^2c^2)$$
$$g' = 2m'mc^2 + a^2 - m'^2c^2$$

Discussion wie oben.

Zweiter Fall. Indices $\bar{m}$ m 1. Parameter —a, 1, mc.

In den Gl. 5, S. 225 setzen wir m′ 0 1 für hkl und $\bar{m}$ m 1 für efg und erhalten:

$$e' = +2m'a^2 + ma^2 - mm'^2c^2 \qquad f' = -m(a^2 + m'^2c^2)$$
$$g' = a^2 - m'^2c^2 - 2m'mc^2$$

Parallelflächen von $m\bar{P}n$.

Erster Fall. Indices mn, m, n. Parameter a, n, mc.

In den Gl. 5, S. 225 setzen wir m′ 0 1 für hkl und mn, m, n für efg und erhalten:

$$e' = mm'^2nc^2 + 2m'na^2 - mna^2 \qquad f' = -m(a^2 + m'^2c^2)$$
$$g' = 2m'mnc^2 + na^2 - m'^2nc^2$$

Zweiter Fall. Indices — mn, m, n. Parameter — a, n, mc.

$$e' = -mm'^2nc^2 + mna^2 + 2m'na^2 \qquad f' = -m(a^2 + m'^2c^2)$$
$$g' = na^2 - m'^2nc^2 - 2m'mnc^2$$

… flächen von $m\breve{P}n$.

… Parameter $na, 1, mc$.

… $f'' = -mn(a^2 + m'^2 c^2)$

… $-na^2 - m'^2nc^2$

… Parameter $-na, 1, mc$.

… $f'' = -mn(a^2 + m'^2 c^2)$

… $-na^2 - m'^2nc^2$.

§. 57.

… der Zwillingsfläche.

… Beispiel (Aragonit).

… repräsentirt eine Zwillings- … ist ein Schnitt senkrecht … Prismenflächen repräsentiren. … Winkel γ ist gleich … dem Winkel der beiden … d und e. Der Winkel γ … f und g wird durch … h halbirt; mithin ist

… Kann bewiesen wer- … $\alpha = 180 - \beta$ ist, so ist die … h der Prismenfläche d … selbst eine Prismenfläche. … $180 - dxt = 121°55'$ und … Die Zwillingsfläche ist

… der Gl. 14. S. 26

… $-(bc)^2hh'$

… $-(ac)^2k'^2 + (bc)^2h'^2$

… Fläche v.

Die Indices der Fläche r sind 0 1 0, die der Fläche v $1\ \frac{1}{n}\ 0$ oder n 1 0. Setzt man noch b = 1 und $w = 180 - \gamma = 63^0\,50'$, so ist

$$\cos 63^0 50' = \frac{a}{\sqrt{n^2 + a^2}}$$

woraus

$$n = a \operatorname{tg} 63^0 50' = \operatorname{ctg} \beta \,.\, \operatorname{tg} 63^0 50'$$

weil a wie aus der Fig. 88 folgt $= \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} 58^0 5'$ ist.

$$n = 1{,}268$$

Die Indices der Fläche v sind mithin 1,268, 1, 0. Dies sind auch die Indices der Parallelfläche g.

Dreht man das obere Individuum um die Zwillingsaxe durch 180^0, so fällt g in die Fortsetzung von r, oder: die Indices 0 1 0 von r gehen nach der Drehung durch 180^0 über in die Indices 1,268, 1, 0. Setzen wir in den Gl. 5, S. 225 für e f g die Werthe 0 1 0 und für e′ f′ g′ die Werthe 1,268, 1, 0, so können wir die Indices h k l der Zwillingsfläche ermitteln. Wir erhalten die drei Gleichungen

$$1{,}268 = 2\,a^2 c^2 k h \qquad 1 = a^2 c^2 k^2 - a^2 l^2 - c^2 h^2 \text{ und } k l = 0$$

Aus der letzten Gleichung folgt, dass entweder k oder l oder beide gleich Null sind. Wäre k = 0, so müsste auch die rechte Seite der ersten Gleichung gleich Null sein. Da das nicht möglich ist, so muss l = 0 sein.

Aus den beiden Gleichungen

$$1{,}268 = 2\,a^2 c^2 k h \text{ und } 1 = a^2 c^2 k^2 - c^2 h^2$$

folgt durch Division:

$$1{,}268 = \frac{2\,a^2 \frac{k}{h}}{a^2 \frac{k^2}{h^2} - 1}$$

Aus dieser Gleichung folgt $\frac{k}{h} = -1$ oder $-k = +h$.

Der zweite Werth für $\frac{k}{h}$ ist irrational, mithin zu verwerfen.

Die Indices der Zwillingsfläche sind mithin $h\, \bar{h}\, 0$ oder $1\, \bar{1}\, 0$. Die Zwillingsfläche ist eine Fläche des Prismas ∞P.

Drittes Verfahren. Der Winkel γ wird durch die Zwillingsfläche halbirt. Die Indices der Zwillingsfläche seien $n'\, 1\, 0$. Der Winkel, den [illegible] bildet, ist $= 180 - \frac{\gamma}{2}$ und es ist vermöge der obigen [illegible] für $\cos w$:

$$\cos \tfrac{1}{2} \gamma = [illegible] \quad \text{woraus} \quad n' = a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \gamma = 1$$

Die Indices der Zwillingsfläche sind mithin $\bar{1}\, 1\, 0$. Die Zwillingsfläche [illegible] des Prismas ∞P.

Viertes Verfahren. Die Zwillingsfläche kann aus der [illegible] h l berechnet werden. Zuerst hat man [illegible] Fläche k zu finden. Dies kann vermittelst [illegible] Gleichung für cos w oder mit Hilfe einer [illegible] Projection geschehen. Aus den Winkeln [illegible] 144° und den Indices von v: 1,268, [illegible] die Indices von k die Werthe:

$$[illegible] = 1,\ \frac{1}{b'},\ \frac{1}{m} \text{ (abgekürzt).}$$

[illegible] von k: 0 1 1 und die von h: $\bar{n}'\, 1\, 0$ sind, [illegible] Zonengleichung

$$n' \frac{m\, b'}{b' - m} = 1$$

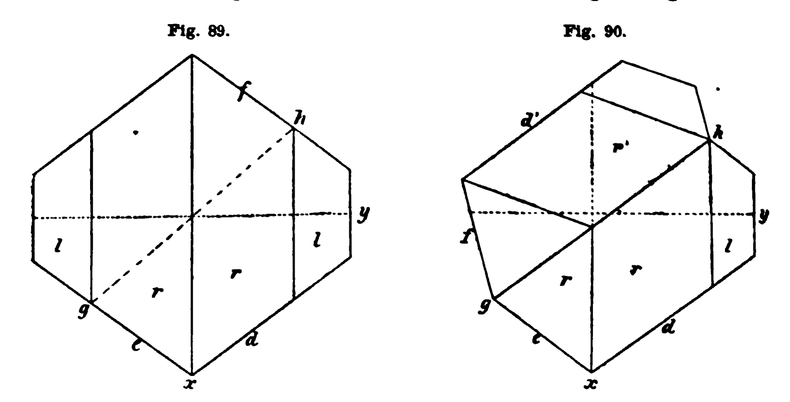
Die Indices der Zwillingsfläche sind mithin $\bar{1}\, 1\, 0$.

[illegible] wird dieses Resultat durch die Untersuchungen [illegible] wurde gefunden, dass die Indices der Fläche r: [illegible] Drehung der Fläche durch 180° übergehen in [illegible] 1, 0. Aus den Resultaten des §. 52 folgt, [illegible] dass wenn die Zwillingsfläche eine Fläche des [illegible] das Brachypinakoid (r) $\infty \breve{P} \infty$ nach der Drehung [illegible] Makroprisma (g)

[illegible] $\infty \bar{P}$ [illegible]

Zweites Beispiel (Markasit).

Die Fig. 89 und 90 sind Schnitte senkrecht zur Verticalaxe. Die Zwillingsfläche ist durch die Linie gh angedeutet;



de ist das Prisma ∞P (de = 106° 5′); l ist das Doma $\breve{P}\infty$ (l : l = 80° 20′); r ist das Doma $\frac{1}{3}\breve{P}\infty$ (r : r = 136° 54′); das Axenverhältniss ist a : b : c = 0,7519 : 1 : 1,1845. In der Fig. 90 ist der hintere Theil um die Zwillingsaxe durch 180° gedreht; die Fig. 89 zeigt den Krystall vor der Drehung.

Erstes Verfahren. Um die Zwillingsfläche zu bestimmen, messen wir den Winkel fge = 147° 50′ (Fig. 90). Die Hälfte dieses Winkels ist 73° 55′ und dieser Winkel und der Winkel des Prismas ed (106° 5′) geben zusammen 180°. Mithin ist gh parallel d und folglich ist die Zwillingsfläche eine Fläche des Prismas ∞P.

Zweites Verfahren. Die Indices der Fläche e (Fig. 90) sind $1\,\bar{1}\,0$, die der Zwillingsfläche gh: n 1 0. Nennen wir den Winkel der Normalen auf gh und e kurz w (w = 106° 5′), so ist vermöge der obigen Gleichung für cos w:

$$\cos w = \frac{a^2 - n}{\sqrt{a^2+1}\,\sqrt{a^2+n^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+n^2}} - \frac{n}{\sqrt{a^2+n^2}}\right)$$

Setzt man

$$\frac{n}{\sqrt{a^2+n^2}} = \cos\varphi$$

Die

Die

Zw

es

Z. Werth

Anblick

h kl der

man diese

Drehung

im

jetzt

Nennen wir w

$w = 32^{\circ}$

folglich

$$n = 0{,}1111\ldots \text{ oder } n = 3{,}484$$

Der Anblick der Fig. 90 lehrt, dass nur der Werth $n = 3{,}484$ möglich ist. Die Indices der Zwillingsfläche sind allgemein $n'\,1\,0$. Setzt man diese Werthe in die Gl. 5, S. 225, so erhält man

$$n' = \frac{n+1}{2c^2(1+a^2)} = 1$$

Die Indices der Zwillingsfläche sind mithin 110. Bestätigt wird dieses Resultat durch die Untersuchungen des §. 50. Dort wurde gefunden, dass das Prisma ∞P nach der Drehung durch 180^0 übergeht in

$$\infty \breve{P} \frac{3-a^2}{3a^2-1} = \infty \breve{P}_{3,497}$$

Der obige Werth 3,484 stimmt mit 3,497 hinreichend genau.

Viertes Verfahren. Die drei Flächen r', r und gh (Fig. 90) sind tautozonal. Man bestimme die Indices der Fläche r' aus den Winkeln $r' : r$ und $r' : d'$ und findet für sie die Werthe

$$\bar{1}, \frac{1}{2{,}6014}, \frac{1}{0{,}24078}$$

Die Indices von r sind 013.

Vermöge der Zonengleichung findet man für den Index n' der Zwillingsfläche

$$n' = \frac{3mn}{n-3m} = 1$$

wenn $m = 0{,}24078$ und $n = 2{,}6014$ ist.

---

§. 58.

II. Das Axensystem ist schiefwinklig.

Auch hier haben wir der Reihe nach die drei Aufgaben zu lösen:

so ist ...en

...ge-

Setzt man noch

so ist ... Y = γ,

... = α. P sei

Va² ... deren

Daraus folgt ... X, Y, Z,

sin (φ — ψ) ... sind die

ψ — φ ... X′Z, Y′Y,

φ ... X und Z′Y

n ... das Axen-

Der zweit... ...en Träger (P)

für n, nämlich ... ...reht worden

der Fig. 89 v... ...man sofort, dass

Die Indic... ... = 2 PX′, ebenso

Drittes ... ... = 2 PZ′ ist. Da-

Zwillingsfläch...

Gleichung zu... ... = 2 cos² PY — 1

muss man d... ...

in Bezug a...

Fig. 89 hat

$$\cos^2 PZ = \frac{l^2 R}{c^2 N}$$

nimmt sie ...

allgemein:

... cos² α — cos² β — cos² γ

Die ... ... sin² γ

den Win...

so ist ... B′ — $\frac{hk}{ab}$ C′]

B′ = cos β — cos α cos γ

Setzt m... — cos α cos β

... die ersten Gleichungen ein, so

so ist

... X′X = 2 h² R — N . a²

... Y′Y = 2 k² R — N . b²

... Z′Z = 2 l² R — N . c²

Um X'Y, X'Z u. s. w. zu ermitteln, verfahren wir genau so, wie es bei rechtwinkligen Axen gezeigt wurde.

Aus dem sphärischen Dreieck X'YP (s. Fig. 73) folgt [1]:

$$\cos X'Y = \cos X'P \cos PY + \sin X'P \sin PY \cos X'PY$$
$$= \cos X'P \cos PY - \sin X'P \sin PY \cos XPY.$$

Aus dem sphärischen Dreieck XPY folgt:

$$\cos XPY = \frac{\cos \gamma - \cos XP \cos PY}{\sin XP \sin PY}$$

Setzt man diesen Werth in die vorhergehende Gleichung und bedenkt, dass X'P = XP und X'Y = XY' ist, so folgt:

$$\cos X'Y = 2 \cos PX \cos PY - \cos \gamma$$

Setzt man in die vorstehende Gleichung die obigen Werthe für cos PX cos PY, so erhält man:

$$2) \begin{cases} abN \cos X'Y = abN \cos XY' = 2hkR - abN \cos \gamma \\ \quad \text{ebenso findet man:} \\ acN \cos X'Z = acN \cos XZ' = 2hlR - acN \cos \beta \\ bcN \cos Y'Z = bcN \cos YZ' = 2klR - bcN \cos \alpha \end{cases}$$

Durch die Gl. 1 und 2 ist die erste Aufgabe gelöst.

2) Die Indices der Flächen des zweiten Individuums, bezogen auf die Indices und Axen des ersten Individuums, sind zu ermitteln.

Wir verfahren genau wie bei rechtwinkligen Axen. Zuerst suchen wir die Indices der Flächen X', Y' und Z' in Bezug auf das Axensystem XYZ (Fig. 73). Die Indices von X' in Bezug auf XYZ seien $x_1 x_2 x_3$, so ist die Gleichung von X':

$$\frac{a}{x_1} \cos X'X = \frac{b}{x_2} \cos X'Y = \frac{c}{x_3} \cos X'Z$$

woraus

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{b \cos X'Y}{a \cos X'X} \text{ und } \frac{x_3}{x_1} = \frac{c \cos X'Z}{a \cos X'X}$$

---

[1]) Vergl. A. Schrauf, Lehrbuch der Krystallographie und Mineral-Morphologie. Wien 1866.

... ein Index willkür... [illegible] ...erden kann, so ... man $x_1 = a \cos X'$ ... [illegible] ... $=$ ...os $X'Y$ und $x_3 = c \cos X'Z$

Setzt man für ... [illegible] ... die Werthe aus den Gl. 1 un... [illegible] ... Indices von X' in Bezug auf ... [illegible]

$$= \frac{\ldots - abN\cos\gamma}{aN}$$

$$= \frac{\ldots R - b^2N}{bN}$$

$$= \frac{\ldots - bcN\cos\alpha}{cN}$$

... [illegible] ... X' in Bezug auf XYZ ... [illegible] ... $X'Y'$ und MZ' gesucht ... [illegible] ... $X'Y'Z'$ bildet. ... [illegible] ... sind, so folgt

$$\cos X'Y' = \frac{H_1}{\sqrt{N_1}\sqrt{N_3}}$$

$$- \frac{c x_1}{\ldots} \sin^2\gamma$$

$$- \frac{c}{ab}(e x_2 + f x_1)$$

$$- \frac{c y_1}{\ldots} \sin^2\gamma$$

$$- \frac{c}{ab}(e y_2 + f y_1)$$

$$
4)\quad \begin{cases} N_1 = \dfrac{e^2}{a^2}\sin^2\alpha + \dfrac{f^2}{b^2}\sin^2\beta + \dfrac{g^2}{c^2}\sin^2\gamma \\ \qquad - 2\left[\dfrac{fg}{bc}A' + \dfrac{eg}{ac}B' + \dfrac{ef}{ab}C'\right] \\ N_2 = \dfrac{x_1{}^2}{a^2}\sin^2\alpha + \dfrac{x_2{}^2}{b^2}\sin^2\beta + \dfrac{x_3{}^2}{c^2}\sin^2\gamma \\ \qquad - 2\left[\dfrac{x_2 x_3}{bc}A' + \dfrac{x_1 x_3}{ac}B' + \dfrac{x_1 x_2}{ab}C'\right] \text{ u. s. w.} \end{cases}
$$

Es bleibt noch übrig, die Indices $e'f'g'$ der Fläche M in Bezug auf das Axensystem $X'Y'Z'$ zu ermitteln. In Bezug auf das Axensystem XYZ sind die Indices von M, wie schon erwähnt, efg. Die Gleichungen der Fläche M, bezogen auf das Axensystem $X'Y'Z'$, sind:

$$\frac{a}{e'}\cos MX' = \frac{b}{f'}\cos MY' = \frac{c}{g'}\cos MZ'$$

Daraus folgt

$$\frac{f'}{e'} = \frac{b\cos MY'}{a\cos MX'} \qquad \frac{g'}{e'} = \frac{c\cos MZ'}{a\cos MX'}$$

Da ein Index willkürlich angenommen werden darf, so setze man:

$$e' = a\cos MX'$$

alsdann ist:

$$f' = b\cos MY'$$

und

$$g' = c\cos MZ'$$

Setzt man in diesen Gleichungen für $\cos MX'$, $\cos MY'$ und $\cos MZ'$ die Werthe aus den Gl. 4, substituirt dann für $x_1 x_2 x_3$, $y_1 y_2 y_3$ u. s. w. die Werthe aus den Gl. 3, so erhält man, wenn man die gemeinschaftlichen Faktoren weglässt:

Da ein Index willkürlich angenomm...
setze man $x_1 = a \cos X'X$, dann ist x_2 ...
$x_3 = c \cos X'Z$

Setzt man für $\cos X'X$, $\cos X'Y$ u. ...
den Gl. 1 und 2, so erhält man für ...
Bezug auf XYZ die Werthe:

$$
3)\begin{cases}
x_1 = \dfrac{2h^2 R - a^2 N}{aN} \qquad x_2 = \ldots \\
\qquad x_3 = \dfrac{2hlR - a\ldots}{aN} \\
y_1 = \dfrac{2hkR - ab\cos\gamma}{bN} \\
\qquad y_3 = \dfrac{2klR - \ldots}{\ldots} \\
z_1 = \dfrac{2hlR - acN\cos\beta}{cN} \\
\qquad z_3 = \dfrac{2l^2R - \ldots}{c\ldots}
\end{cases}
$$

Die Indices irgend einer ...
seien efg. Es sollen die Wi...
werden, welche diese Ebene ...
Da die Indices von M, X′, ...
aus Gl. 19, S. 29:

$$
4)\begin{cases}
\cos MX' = \dfrac{H}{\sqrt{N_1}\sqrt{N}\ldots} \\
\qquad \cos \ldots \\
\text{worin} \\
\qquad H = \dfrac{ex_1}{a^2}\sin\ldots \\
-\dfrac{A'}{bc}(gx_2 + \ldots \\
\qquad H_1 = \ldots \\
-\dfrac{A'}{bc}(g\ldots
\end{cases}
$$



In diesen Gleichungen ist:

$$[illegible] = 2h^2R - a^2N \qquad E_1 = 2kl\,R - bcN\cos\alpha$$
$$[illegible] = 2k^2R - b^2N \qquad E_2 = 2hl\,R - acN\cos\beta$$
$$[illegible] = 2l^2R - c^2N \qquad E_3 = 2hkR - abN\cos\gamma$$

$$[illegible]' = \cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma \qquad B' = \cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma$$
$$C' = \cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta$$

$$[illegible] = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

$$N = \frac{h^2}{a^2}\sin^2\alpha + \frac{k^2}{b^2}\sin^2\beta + \frac{l^2}{c^2}\sin^2\gamma$$
$$- 2\left[\frac{kl}{bc}A' + \frac{hl}{ac}B' + \frac{hk}{ab}C'\right]$$

Setzt man in diesen Gleichungen $\alpha = \beta = \gamma = 90$, so er- [illegible] man die Gl. 5, S. 325.

3) Die Indices der Zwillingsfläche sind zu er- [illegible]teln.

Alles, was S. 226 in Betreff dieses Punktes gesagt worden [illegible]t, gilt auch hier.

---

§. 59.

Anwendung der im vorigen Paragraphen vorgetragenen Theorie auf das monosymmetrische (monokline) Krystallsystem.

Die Zwillingsbildung im monosymmetrischen System erfolgt gewöhnlich nach folgenden einfachen Gesetzen:

1) Die Zwillingsaxe ist die Normale des Orthopinakoids.
2) Die Zwillingsaxe ist die Normale der Basis oP
3) Die Zwillingsaxe ist die Normale von $\pm$ mP$\grave{\infty}$

Setzen wir in den Formeln des vorhergehenden Paragraphen $\alpha = \gamma = 90$, so erhalten wir die für das monosymmetrische System geltenden Gleichungen:

$$
6)\left\{
\begin{aligned}
e' &= \frac{ae\left[\frac{h^2}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}\sin^2\beta-\frac{l^2}{c^2}\right]+af\,\frac{2kh}{b^2}\sin^2\beta+ag\left[\frac{2hl}{c^2}-\frac{2h^2}{ac}\cos\beta\right]}{\sqrt{\left[\frac{D_1^{\,2}}{a^2}+\frac{E_3^{\,2}}{b^2}\sin^2\beta+\frac{E_2^{\,2}}{c^2}-\frac{2\cos\beta}{ac}D_1E_2\right]}}\\[2ex]
f' &= \frac{be\left[\frac{2kh}{a^2}-\frac{2kl}{ac}\cos\beta\right]+bf\left[\frac{k^2}{b^2}\sin^2\beta-\frac{h^2}{a^2}-\frac{l^2}{c^2}+\frac{2hl}{ac}\cos\beta\right]+bg\left[\frac{2kl}{c^2}-\frac{2kh}{ac}\cos\beta\right]}{\sqrt{\left[\frac{E_3^{\,2}}{a^2}+\frac{D_2^{\,2}}{b^2}\sin^2\beta+\frac{E_1^{\,2}}{c^2}-\frac{2\cos\beta}{ac}E_3E_1\right]}}\\[2ex]
g' &= \frac{ce\left[\frac{2hl}{a^2}-\frac{2l^2}{ac}\cos\beta\right]+cf\,\frac{2kl}{b^2}\sin^2\beta+cg\left[\frac{l^2}{c^2}-\frac{h^2}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}\sin^2\beta\right]}{\sqrt{\left[\frac{E_2^{\,2}}{a^2}+\frac{E_1^{\,2}}{b^2}\sin^2\beta+\frac{D_3^{\,2}}{c^2}-\frac{2\cos\beta}{ac}E_2D_3\right]}}\\[2ex]
N &= \frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\sin^2\beta+\frac{l^2}{c^2}-\frac{2hl}{ac}\cos\beta\\[1ex]
D_1 &= 2h^2\sin^2\beta-a^2N \qquad E_1 = 2kl\,\sin^2\beta\\
D_2 &= 2k^2\sin^2\beta-b^2N \qquad E_2 = 2hl\,\sin^2\beta-acN\cos\beta\\
D_3 &= 2l^2\sin^2\beta-c^2N \qquad E_3 = 2hk\,\sin^2\beta
\end{aligned}
\right.
$$

Die vorstehenden Gleichungen geben uns die Indices $e'f'g'$ einer Fläche, die vor ihrer Drehung durch 180° in Bezug auf ein und dasselbe Axensystem die Indices efg hatte. Wir haben zu zeigen, wie man mit Hilfe dieser Indices die repräsentative Formel bilden kann.

In der Fig. 86 sei $OD = a$ und $BO = b = 1 > a$. In der Fig. 91 sei $OA = a$ und $OD = b = 1 < a$. Die Lage

der Fläche nach ihrer Drehung durch 180° sei in beiden Figuren A′ B′. Diese Fläche wird parallel mit sich selbst verschoben, bis sie die Lage AB einnimmt, d. i. bis sie mit ihrem einen Endpunkt in den Endpunkt der einen Axe und mit dem

Fig. 86.

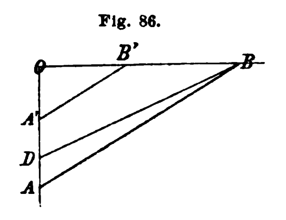
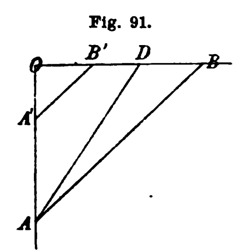


Fig. 91.



anderen Endpunkt über den Endpunkt der anderen Axe fällt. Die Linie AB in Fig. 86 repräsentirt dann allgemein eine der Pyramiden $mP\breve{n}$, in Fig. 91 dagegen eine der Pyramiden $mP\bar{n}$. Aus beiden Figuren folgt:

$$\frac{AO}{A'O} = \frac{BO}{B'O}$$

Nun ist $A'O = \frac{1}{e'} \cdot a$ und $B'O = \frac{1}{f'} b = \frac{1}{f'}$, mithin, da in Fig. 86 $BO = 1$ und $AO = na$ ist,

$$AO = \frac{A'O}{B'O} = \frac{af'}{e'} = na$$

folglich

$$n = \frac{f'}{e'}$$

Da n stets > 1 ist, so muss für eine Pyramide der klinodiagonalen Reihe (s. Fig. 86) $\frac{f'}{e'} > 1$ oder $e' < f'$ sein.

In Fig. 91 repräsentirt AB eine Pyramide der orthodiagonalen Reihe und wir erhalten aus obiger Gleichung, da nun $AO = a$ und $OB = nb = n$ ist,

$$OB = \frac{B'O}{A'O} AO = \frac{e'}{f'} = n$$

Da $n > 1$ ist, so muss nun $e' > f'$ sein.

Daraus ergibt sich folgende Regel für die Bildung der Formeln. Sind die drei Indices $e' f' g'$ von einander verschieden

und ist $e' < f'$, so liegt die Pyramide $\frac{f'}{g'} P \frac{f'}{e'}$

ist aber $e' > f'$, so liegt die Pyramide $\frac{e'}{g'} P \frac{\overline{e'}}{f'}$

ist $e' = f'$, so liegt die Pyramide $\frac{e'}{g'}$ P vor.

Es ist nunmehr leicht, aus diesen drei Hauptfällen alle möglichen Fälle zu ermitteln. Man braucht nur dem $e' f' g'$ alle Werthe von Null bis $\pm\, e' f' g'$ beizulegen.

§. 60.

Erstes Zwillingsgesetz: Die Zwillingsfläche ist das Orthopinakoid.

Setzen wir in den Gl. 6, S. 288 für h k l die Indices des Orthopinakoids 1 0 0, so erhalten wir die Gleichungen:

$$7)\quad e' = e - \frac{2 a g \cos\beta}{c} \qquad f' = -f \qquad g' = -g$$

Parallelflächen der Pyramide + mP.

Indices $m\,m\,\bar{1}$ oder $\bar{m}\,m\,1$.

Parameter a, b, — mc oder — a, b, mc.

Setzen wir in den Gl. 7, S. 290 für e f g die Werthe $m\,m\,\bar{1}$ oder $\bar{m}\,m\,1$, so erhalten wir für $e' f' g'$ die Werthe:

$$e' = m + \frac{2 a \cos\beta}{c} \qquad f' = -m \qquad g' = 1$$

Daraus folgt die Formel

$$-(m + 2h)\, P\, \frac{\overline{m + 2h}}{m}$$

wenn man $\frac{a \cos\beta}{c} = h$ setzt.

Parallelflächen der Pyramide — mP.

Indices $m\,\bar{m}\,1$. Parameter a, — b, mc.

Setzen wir in den Gl. 7, S. 290 für e f g die Werthe $m\,\bar{m}\,1$, so erhalten wir für $e' f' g'$ die Werthe:

$$e' = m - \frac{2 a \cos\beta}{c} \qquad f' = m \qquad g' = -1$$

Daraus folgt die Formel:

$$+ m P \frac{\grave{m}}{m - 2h}$$

wenn $h = \frac{a \cos \beta}{c}$ gesetzt wird.

Parallelflächen der Orthopyramide $+ m P \bar{n}$.

Indices $m n$, m, $\bar{n}$. Parameter a, $n b$, $- m c$.

Setzen wir in den Gl. 7, S. 290 für $e f g$ die Werthe $m n$, m, $\bar{n}$, so erhalten wir:

$$e' = n \left(m + \frac{2 a \cos \beta}{c}\right) \qquad f' = - m \qquad g' = n$$

Daraus folgt die Formel:

$$- (m + 2h) P \frac{\overline{(m + 2h) n}}{m}$$

wenn $\frac{a \cos \beta}{c} = h$ gesetzt wird.

Parallelflächen der negativen Orthopyramiden $- m P \bar{n}$.

Indices $m n$, m, n. Parameter a, $n b$, $m c$.

Setzt man in den Gl. 7, S. 290 für $e f g$ die Werthe $m n$, m, n, so erhält man

$e' = n (m - 2h)$; $f' = - m$; $g' = - n$, worin $h = \frac{a \cos \beta}{c}$

Daraus findet man die Formel:

$$+ \frac{m}{n} P \frac{\grave{m}}{n (m - 2h)}$$

wenn $e' < f'$ oder $\frac{m}{m - 2h} > n$

$$+ (m - 2h) P \frac{\overline{n (m - 2h)}}{m}$$

wenn $e' > f'$ oder $\frac{m}{m - 2h} < n$

$$+ (m - 2h) P$$

wenn $e' = f'$ oder $\frac{m}{m - 2h} = n$ ist.

Parallelflächen der positiven Klinopyramiden $+ mP\grave{n}$.

Indices m, mn, $\bar{n}$. Parameter na, b, —mc.

Setzt man in den Gl. 7, S. 290 für efg die Werthe m, mn, $\bar{n}$, so erhält man

$$e' = m + 2hn \qquad f' = -mn \qquad g' = n, \text{ worin } h = \frac{a \cos \beta}{c}$$

Daraus folgt die Formel:

$$- m P \frac{m\grave{n}}{m + 2hn}$$

wenn $e' < f'$ oder $\frac{mn}{m + 2hn} > 1$

$$- \frac{m + 2hn}{n} P \frac{\overline{m + 2hn}}{mn}$$

wenn $e' > f'$ oder $\frac{mn}{m + 2hn} < 1$

$$- m P$$

wenn $e' = f'$ oder $\frac{mn}{m + 2hn} = 1$ oder $m = \frac{2nh}{n - 1}$

Parallelflächen der negativen Klinopyramiden $- mP\grave{n}$.

Indices m, mn, n. Parameter na, b, mc.

Man findet

$$e' = m - 2hn; \; f' = - mn; \; g' = - n, \text{ worin } h = \frac{a \cos \beta}{c}$$

Daraus folgt die Formel:

$$+ m P \frac{m\grave{n}}{m - 2hn}$$

wenn $e' < f'$ oder $m > 2nh$

$$- m P \frac{m\grave{n}}{m - 2nh}$$

wenn $m < 2nh$

$$m P \grave{\infty}$$

wenn $m = 2nh$

Parallelflächen der Domen.

Setzen wir in den vorhergehenden Resultaten $n = \infty$, so erhalten wir das Folgende:

Dem Hemidoma $+ mP\overline{\infty}$ entspricht $-(m + 2h)\, P\overline{\infty}$

Dem Hemidoma $- mP\overline{\infty}$ entspricht oP, wenn $m = 2h$

Dem Hemidoma $- mP\overline{\infty}$ entspricht $+ (m - 2h)\, P\overline{\infty}$

Dem Doma $+ mP\grave{\infty}$ entspricht $- mP\frac{\grave{m}}{2h}$ wenn $m > 2h$

Dem Doma $+ mP\grave{\infty}$ entspricht $- mP$, wenn $m = 2h$

Dem Doma $+ mP\grave{\infty}$ entspricht $- 2hP\frac{\overline{2h}}{m}$ wenn $m < 2h$

Dem Doma $- mP\grave{\infty}$ entspricht $+ mP\frac{\grave{m}}{2h}$

§. 61.

Zweites Zwillingsgesetz: Zwillingsfläche die Basis.

Setzen wir in den Gl. 6, S. 288 für hkl die Werthe $0\ 0\ 1$, so erhalten wir

$$8)\quad e' = -e \qquad f' = -f \qquad g' = g - 2he$$

wenn $h = \frac{c \cos \beta}{a}$ ist.

Parallelflächen der Pyramiden $+ mP$.

Indices $m\, m\, \bar{1}$. Parameter a, b, $-mc$.

Setzt man in den Gl. 8 für efg die Werthe $m\, m\, \bar{1}$, so erhält man

$$e' = m \qquad f' = m \qquad g' = 1 + 2hm$$

Parallelflächen der Pyramiden $- mP$.

Indices $m\, m\, 1$. Parameter a, b, mc.

$$e' = -m \qquad f' = -m \qquad g' = 1 - 2hm$$

Parallelflächen der Orthopyramiden $+ mP\bar{n}$.

Indices mn, m, $\bar{n}$. Parameter a, nb, $-mc$.

$$e' = -mn \qquad f' = -m \qquad g' = -(1 + 2hm)\, n$$

Parallelflächen der Orthopyramiden — $mP\bar{n}$.

Indices mn, m, n. Parameter a, nb, mc.

$$e' = -mn \qquad f' = -m \qquad g' = n(1 - 2hm)$$

Parallelflächen der Klinopyramiden $+ mP\grave{n}$.

Indices $\bar{m}$, mn, n. Parameter $-na$, b, mc.

$$e' = m \qquad f' = -mn \qquad g' = n + 2mh$$

Parallelflächen der Klinopyramiden — $mP\grave{n}$.

Indices m, mn, n. Parameter nb, b, mc.

$$e' = -m \qquad f' = -mn \qquad g' = n - 2mh$$

Drittes Zwillingsgesetz: Zwillingsfläche eine Fläche des Klinodomas $m'P\grave{\infty}$.

Setzen wir in den Gl. 6, S. 288 für hkl die Werthe $0\,m'\,1$, so erhalten wir:

$$9) \begin{cases} e' = -\dot{2} \\ f' = \dfrac{-2b^2cm'e\cos\beta + af(m'^2c^2\sin^2\beta - b^2) + 2ab^2gm'}{a(m'^2c^2\sin^2\beta + b^2)} \\ g' = \dfrac{-2b^2ce\cos\beta + 2ac^2fm'\sin^2\beta + ag(b^2 - m'^2c^2\sin^2\beta)}{a(m'^2c^2\sin^2\beta + b^2)} \end{cases}$$

Diese Formeln vereinfachen sich noch bedeutend, wenn das Klinodoma rechtwinklig, d. i. wenn $m'c\sin\beta = b$ ist.

§. 62.

Ermittelung der Zwillingsfläche.

Erstes Beispiel (Orthoklas).

Erstes Verfahren. Die drei Flächen T, T' und die Zwillingsfläche (s. Fig. 92) sind tautozonal.

Die Indices der Fläche T sind $1\,\bar{1}\,0$

Die der Fläche T' sind $1\,\dfrac{\bar{1}}{n}\,\dfrac{1}{m}$ oder mn, $\bar{m}$, n

Die der Zwillingsfläche sind $0\,1\,\dfrac{1}{m'}$ oder $0\,m'\,1$

Vermöge der Zonengleichung folgt

$$m' = \frac{m(n-1)}{n}$$

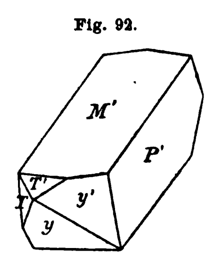


Fig. 92.

Kennt man m und n, so ergibt sich aus dieser Gleichung m'. Dem T' gegenüber in demselben Individuum liegt eine entsprechende Fläche mit den Indices — m n, m, n. Diese letztere bildet mit M' den Winkel 120° 36' = w und mit P' den Winkel 112° 13' = w'. Mit Hilfe dieser zwei Winkel kann man in bekannter Weise mit Hilfe einer stereographischen Projection oder mit Hilfe der Gl. 21, S. 30 m und n finden. Da

$$a : b : c = 0,65842 : 1 : 0,55527$$

ist, so findet man

$$m = 7,7808 \text{ und } n = 1,3464$$

Daraus ergibt sich:

$$m' = 2$$

Die Zwillingsfläche ist eine Fläche des Klinodomas 2P ∞̀.

Zweites Verfahren. Die Flächen M' und P' bilden einen rechten Winkel, ebenso die Flächen M' und die dem P' gegenüberliegende entsprechende Fläche. Die Zwillingsfläche halbirt bekanntlich den Winkel der beiden letzten Flächen. Denkt man sich die Zwillingsfläche parallel mit sich selbst verschoben, bis sie die Y-Axe, die auf P' senkrecht ist, in der Entfernung b = 1 schneidet, und errichtet auf M' eine Senkrechte, so wird diese von der verschobenen Zwillingsfläche in der Entfernung m'' geschnitten und es ist, wie eine Durchschnittsfigur lehrt,

$$\operatorname{tg} 45^0 = \frac{m''}{b} = m'' = 1$$

Die Z-Axe bildet mit der Senkrechten auf M' den Winkel 90 — β = 26° 3'. Mithin ist

$$\cos(90 - \beta) = \sin \beta = \frac{m''}{m'c}$$

$$m' = \frac{m''}{c \sin \beta} = \frac{1}{c \sin \beta} = 2$$

Dasselbe Resultat erhält man auch mit Hilfe der Gl. 21, S. 30. Der Winkel, den M′ mit der Zwillingsfläche bildet, ist 45°. Die Indices von M′ sind 0 0 1, die der Zwillingsfläche 0 m′ 1. Mithin ist

$$\cos 45 = \frac{H}{\sqrt{N}\,\sqrt{N_1}} = \frac{b}{\sqrt{m'^2 c^2 \sin^2 \beta + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{m'^2 c^2 \sin^2 \beta + 1}}$$

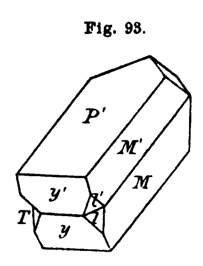
Aus dieser Gleichung folgt:

$$m' = \frac{1}{c \sin \beta} = 2$$

Zweites Beispiel (Orthoklas).

Erstes Verfahren. Die Fig. 93 repräsentirt ein andere, am Orthoklas beobachtete Zwillingsbildung. Die Zwillingsfläche liegt in den beiden Zonen y′ y und P′M′, ergibt sich mithin aus dem Durchschnitt der Zonen. Die Indices von y sind $1\ 0\ \frac{\bar{1}}{m}$ oder m 0 $\bar{1}$, die von y′ sind m 0 1, die von P′ sind 0 0 1 und die von M′ sind 0 1 0. Vermöge der Zonengleichung erhält man für die Indices der Zwillingsfläche die Werthe 0 0 1. Die Zwillingsfläche ist die Basis.

Fig. 93.



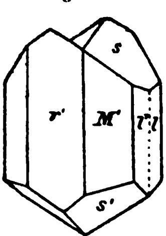
Zweites Verfahren. Der Winkel P′ : M′ ist gleich 90°, der Winkel M′ : M = 180°. Dieser letztere wird durch die Zwillingsfläche halbirt. Die Hälfte ist 90°; folglich ist die Zwillingsfläche der Fläche P′ parallel und da P′ die Basis ist, so ist die Zwillingsfläche die Basis.

Drittes Beispiel (Augit).

Die Fig. 94 repräsentirt einen Zwillingskrystall des gemeinen Augits. Da l′ mit l in eine Ebene fällt, der Winkel

l : l′ mithin 180° ist und dieser Winkel durch die Zwillingsfläche halbirt wird, so folgt, dass die Zwillingsfläche der Fläche r′ parallel ist, mithin eine Fläche des Orthopinakoids $\infty P \bar{\infty}$ ist.

Fig. 94.



Auch in folgender Weise kann es gezeigt werden. Der einspringende Winkel bei s beträgt 153° 1′. Der Winkel, den s mit der Orthopinakoidfläche bildet, ist 76° 30′ 30″ und dieser Winkel ist genau die Hälfte von 153° 1′, mithin ist die Zwillingsfläche parallel $\infty P \bar{\infty}$.

---

§. 63.

Anwendung der vorgetragenen Theorie auf das trikline Krystallsystem.

Da die allgemeine Theorie des triklinen Systems bereits mitgetheilt worden ist, so bleibt nur noch übrig, zu zeigen, wie sie sich in speciellen Fällen gestaltet. Am häufigsten erfolgt die Zwillingsbildung nach dem Gesetz: die Zwillingsfläche ist das Brachypinakoid. Die Zwillingsbildung findet in der Regel mit Juxtaposition der Individuen und in vielfacher Wiederholung statt. Bei den triklinen Feldspathen sind die Zwillingsindividuen in der Richtung der Zwillingsaxe derart verkürzt, dass sie als ein Aggregat mikroskopisch dünner Lamellen erscheinen. Durchschneidet eine Spaltungsrichtung die Lamellen, so erkennt man auf der Spaltungsfläche die Zwillingsstreifung.

Erstes Zwillingsgesetz: Zwillingsfläche das Brachypinakoid $\infty \breve{P} \infty$.

Setzt man in den Gl. 5, S. 286 für h k l die Werthe 0 1 0, so erhält man:

$$e' = -e \qquad f' = \frac{acf\sin^2\beta - 2bceC' - 2abgA'}{ac\sin^2\beta}$$

$$g' = -g$$

Wenn man aus den drei Seiten α, β, γ ein sphärisches Dreieck construirt und die den Seiten gegenüberliegenden Winkel entsprechend durch ABC bezeichnet, so ist:

$$\frac{A'}{\sin\beta} = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta} = \sin\gamma\cos A$$

und

$$\frac{C'}{\sin\beta} = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\beta} = \sin\alpha\cos C$$

Substituirt man diese Werthe in die vorhergehende Gleichung, so erhält man:

$$e' = -e$$

$$f' = \frac{acf\sin\beta - 2bce\sin\alpha\cos C - 2abg\sin\gamma\cos A}{ac\sin\beta}$$

$$g' = -g$$

Die Discussion dieser Gleichungen ist genau dieselbe wie die der entsprechenden Gleichungen im rhombischen System. Die Resultate sind diese:

Ist $e' < f'$, so liegt die Pyramide $\frac{f'}{g'}\breve{P}\frac{f'}{e'}$

Ist $e' > f'$, so liegt die Pyramide $\frac{e'}{g'}\bar{P}\frac{e'}{f'}$

Ist $e' = f'$, so liegt die Pyramide $\frac{f'}{g'}P$ vor.

Um alle speciellen Fälle zu erhalten, muss man dem $e'f'g'$ alle möglichen Werthe von 0 bis $\pm\, e'f'g'$ beilegen..

Zweites Zwillingsgesetz: Zwillingsfläche die Basis oP.

Setzen wir in den Gl. 5, S. 286 für hkl die Werthe 0 0 1, so erhalten wir:

$$e' = -e;\quad f' = -f;\quad g' = \frac{abg\sin^2\gamma - 2acfA' - 2bceB'}{ab\sin^2\gamma}$$

oder, da

$$\frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\gamma} = \sin\alpha\cos B$$

und

$$\frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\gamma} = \sin\beta\cos A \text{ ist,}$$

$$e' = -e \qquad f' = -f$$

$$g' = \frac{abg\sin\gamma - 2acf\sin\beta\cos A - 2bce\sin\alpha\cos B}{ab\sin\gamma}$$

Die Discussion der Gleichungen ist wie oben.

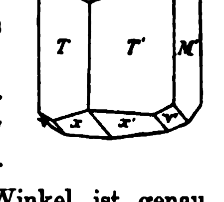
§. 64.

Bestimmung der Zwillingsfläche.

Albit.

Erstes Verfahren. Die Fig. 95 repräsentirt eine am Albit beobachtete Zwillingsbildung. Der $\sphericalangle T:T' = 120^0\,40'$ wird durch die Zwillingsfläche halbirt. Da nun der Winkel $T':M' = 119^0\,40'$ den Winkel $\frac{T:T'}{2} = 60^0 20'$ genau zu 180^0 ergänzt, so ist die Zwillingsfläche der Fläche M′ parallel, mithin das Brachypinakoid $\infty\breve{P}\infty$.

Fig. 95.



Dasselbe Resultat ergibt sich aus folgender Betrachtung. Der Winkel $P : P' = 172^0\,48'$ wird durch die Zwillingsfläche halbirt. Der Winkel $P' : M'$ beträgt $86^0\,24'$ und dieser Winkel ist genau gleich $\frac{1}{2}(P : P')$; mithin ist die Zwillingsfläche der Fläche M′ parallel.

Zweites Verfahren. Die Zwillingsfläche liegt in der Zone M′T′T und in der Zone M′P′P; sie ergibt sich mithin aus dem Durchschnitt der beiden Zonen.

